Feladatsorok - I. forduló

V. osztály

1. Feladat. Egy szigeten kétlábú és hétfejű, valamint négylábú és ötfejű sárkányok laknak. Összesen 58 lábuk és 140 fejük van. Hány sárkány él ezen a szigeten az egyes fajtákból külön-külön?

Simon József, Csíkszereda

2. Feladat. Adott az $\overline{abcd}$ különböző számjegyekből álló szám, amelyről tudjuk, hogy $\overline{ab} > \overline{cd}$, továbbá azt is, hogy az $\overline{abc}$ szám d-vel való osztási hányadosa 25 és maradéka 1.

a) Határozd meg az $\overline{abcd}$ számot!

b) Határozd meg a $2^{\overline{abcd}}$ hatvány utolsó számjegyét!

c) Igazold, hogy $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{\overline{abcd}}$ szám nem négyzetszám!

Zajzon Csaba, Barót

3. Feladat. a) Keress olyan p és q prímszámot, amelyre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ összeg reducibilis!

b) Igazold, hogy a $p \neq q$ prímszámok esetén az $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ összeg irreducibilis!

c) Határozd meg a p és q prímszámokat úgy, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{676}{2019}$.

Kocsis Attila Levente, Déva
Zajzon Csaba, Barót

4. Feladat. Az V. osztályban a lányok számának a negyede ugyanannyi, mint a fiúk számának az ötöde. Egy matekfelmérőn senki nem írta meg a 10-est, de 7-esnél gyengébb jegyet sem kapott senki. A jegyek összege 271 lett. Hány lány és hány fiú volt az osztályban?

Császár Sándor, Csíkmadaras

5. Feladat. Egy 2019×2019-es négyzet alakú, elemi négyzetekből (mezőkből) álló táblán van egy – a középső mezőt is fedő – négyzet alakú 1006×1006-os letakart rész. A táblán csak függőleges és vízszintes irányban lehet haladni. Nevezzük kenguruugrásnak azt a lépést, amely során **vagy** vízszintesen előbb három, majd azt követően függőlegesen két mezőt, **vagy** függőlegesen előbb három, majd azt követően vízszintesen két mezőt haladunk.

Bejárhatjuk-e a le nem takart részt egyetlen kenguruval kenguruugrásokkal úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk (érintett mezőnek tekintjük az ugrás kiindulási és érkezési mezejét), és az utolsóként érintett mező kenguruugrásnyira legyen attól, amelyről elindultunk?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

VI. osztály

1. Feladat. Az a, b, c és d olyan nullától különböző természetes számok, amelyekre

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \quad \text{és} \quad \frac{c}{d} = \frac{6}{7}.$$

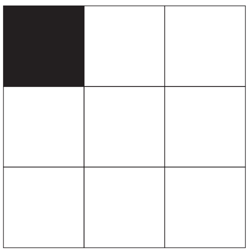
Határozd meg az a, b, c és d természetes számokat a következő esetekben:

a) $a + b + c + d = 315$;

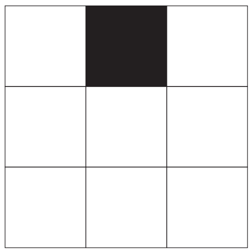
b) az a szám 50 %-ának, a b szám 40 %-ának, a c szám 30 %-ának és a d szám 20 %-ának az összege 168.

(***)

2. Feladat. Melyik ábrán tölthetők ki a fehér négyzetek az $1, 2, 3, \ldots, 8$ számokkal úgy, hogy minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és minden sorban illetve minden oszlopban, továbbá mindkét átlón a számok összege ugyanannyi legyen? Írj fel egy megoldást, ha létezik! Amennyiben nem létezik ilyen kitöltés, bizonyítsd be, hogy miért nem!



1. ábra



2. ábra

Durugy Erika, Torda

3. Feladat. Az $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots, OA_9$ olyan egymástól különböző félegyenesek, amelyekre $\widehat{A_1OA_2} \equiv \widehat{A_2OA_3} \equiv \widehat{A_3OA_4} \equiv \ldots \equiv \widehat{A_8OA_9}$ és $\widehat{A_1OA_9} = 180°$.

a) Hány szöget határoznak meg az adott félegyenesek?

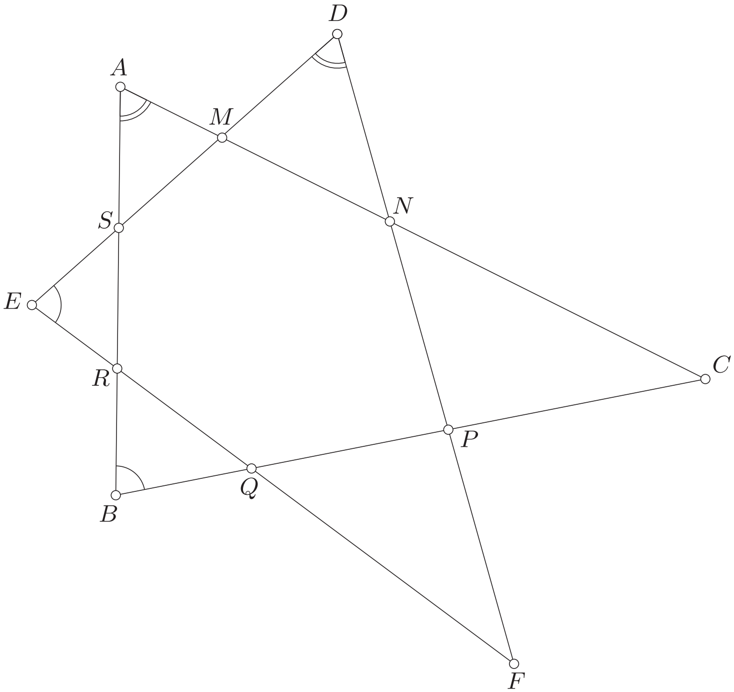
b) Számítsd ki az a) pontban kapott szögek mértékének összegét!

(***)

4. Feladat. Az ábrán látható ABC és DEF háromszögekben $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ és $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$. Tudjuk, hogy az AC oldal a DE és DF oldalakat az M és N pontokban metszi, a BC oldal az FD és FE oldalakat a P és Q pontokban metszi, az AB oldal pedig az ED és EF oldalakat az S és R pontokban metszi.

a) Igazold, hogy $\widehat{MNP} \equiv \widehat{PQR} \equiv \widehat{RSM}$!

b) Ha tudjuk, hogy $\widehat{SMN} + \widehat{NPQ} + \widehat{QRS} = 330°$, számítsd ki az $\widehat{MNP}$ mértékét!



Simon József, Csíkszereda

5. Feladat. Szakértők egy gyermektábor kibővítésén dolgoztak. Tervezésük szerint 30 munkás 90 nap alatt tud felépíteni egy üdülőházat. Miután 30 munkás 10 napot dolgozott, érkezett 10 munkás segíteni. Velük együtt dolgoztak 10 napot, majd 20 munkás eltávozott. Az ott maradt munkások 10 napon át folytatták a munkát, majd jött még 5 munkás. Velük együtt dolgoztak 10 napot, majd csatlakozott hozzájuk még 6 munkás. Ebben az összetételben addig dolgoztak együtt, amíg az üdülőház elkészült. A munkások egyformán jól dolgoztak. Mennyi idő alatt készült el az üdülőház?

Simon József, Csíkszereda

VII. osztály

1. Feladat. a) Írd fel a 4 és az 505 számok számtani és mértani középarányosát, majd helyezd őket növekvő sorrendbe!

b) Igazold, hogy

$$\frac{\sqrt{2018}}{1011}+\frac{\sqrt{2019}}{676}+\frac{\sqrt{2020}}{509}<\frac{3}{2}.$$

Hodgyai Edit, Micske

2. Feladat. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $E = 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ prímszám!

dr. Bencze Mihály, Brassó

3. Feladat. Boldizsár 216 egyforma sárga színű kis kockát összeragasztva egy nagy tömör kockát készített. Ezután a lapjait piros, kék és zöld színűre festette úgy, hogy a szemben lévő lapok ugyanolyan színűek legyenek. Szárítás után a kockát véletlenül elejtette így az, az eredeti kis kockáira hullott szét. Nem adta fel, kisebb méretű, több darabból álló, tömör kockákat ragasztott össze belőlük.

a) Legtöbb hány olyan háromszínű kockát készíthetett, melyeknek szemközti oldalai ugyanolyan színűek?

b) Összerakható-e több egyszínű, különböző méretű, nagyobb tömör kocka a 216 széthullott kis kockából úgy, hogy minden kockát felhasználjunk?

c) Igazold, hogy bármely k pozitív egész szám esetén 6^{3k} felírható három teljes köb összegeként!

Zay Éva, Zilah

4. Feladat. Hörcsögh úr büszke fiaira, egyformán dolgozó, szorgalmas hörcsögfiúk. Egy nap a tanyájuk közelében, az odújuktól egyforma távolságra két halom búzát találtak. Az egyikben kétszer több búzaszem volt, mint a másikban.

Hörcsögh úr a fiaira bízta a halmok beszállítását. Mindannyian a nagyobbik halomból kezdték hordani a búzát. Egy óra elteltével a fiúk fele átment a kisebbik halomhoz és onnan szállította tovább a búzát az odúba. Újabb egy óra elteltével a nagyobbik halom betakarításával végeztek, és mindenki megpihent. Közben kiszámolták, hogyha három hörcsögfiú még két órát dolgozna, minden búzaszem betakarításra kerülne.

a) Hány fia van Hörcsögh úrnak?

b) Ha a hörcsögfiúk pihenő nélkül, mindannyian tovább dolgoznak, még mennyi időre lett volna szükségük a teljes betakarításhoz?

Császár Sándor, Csíkmadaras

5. Feladat. Az ABC háromszögben F az AC szakasz, E pedig a BF szakasz felezőpontja. Legyen $AE \cap BC = \{G\}$ és $FG \cap AB = \{D\}$. Igazold, hogy:

a) $EG = \frac{1}{3}AE$;

b) $[AB] \equiv [BD]$;

c) G az ACD háromszög súlypontja;

d) $\frac{T_{EFG_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{1}{12}$.

Simon József, Csíkszereda

VIII. osztály

1. Feladat. Az $n \in \mathbb{N}^*$ természetes számot *szerencsésnek* nevezzük, ha n^2 felírható n darab egymásutáni természetes szám összegeként. Bizonyítsd be, hogy:

1) a 13 szerencsés szám;

2) egy nullától különböző természetes szám akkor és csak akkor szerencsés, ha páratlan!

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. Feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 4 cm. A BB' és CC' éleken felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $AE = 5$ cm és $AF = 6$ cm. Határozd meg az (AEF) sík és a kocka síkmetszetének kerületét!

Császár Sándor, Csíkmadaras

3. Feladat. Az a, b, c, d valós számok esetén legyen

$$S = a + b + c + d \quad \text{és} \quad P = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

1) Fejezd ki az $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ összeget csak az S és P segítségével!
2) Ha $S = 4$ és $P = 6$, akkor határozd meg az $a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}+d^{2019}$ értékét!

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. A gyereknapon 17 gyerek közül mindenki játszik egy játékot mindegyik társával. Sorshúzással döntik el, hogy sakkot, teniszt vagy amőbát. Mutasd ki, hogy van három olyan gyerek, aki egymás között ugyanazt a játékot játszotta!

Zákány Mónika, Nagybánya
Tóth Csongor, Szováta

5. Feladat. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög BC átfogóján felveszünk egy P tetszőleges pontot. Az APC háromszög köré írt kör középpontját jelölje M, és legyen N az M pont AP szerinti szimmetrikusa.
1) Igazold, hogy az $ANPM$ négyszög körbeírható!
2) Hol kell elhelyezkedjen a P pont úgy, hogy a BC oldal az $ANPM$ négyszög köré írt kör érintője legyen?
3) Mutasd ki, hogy az N pont az APB háromszög köré írt kör középpontja!

Tóth Csongor, Szováta

IX. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3}\right]=3n+3,$$

ahol $[x]$ az x egész részét jelöli!

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. Feladat. Az ABC háromszög síkjában felvesszük az E és M pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$ és $k\cdot\overrightarrow{AM}+3\cdot\overrightarrow{BM}+m\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$, ahol $k,m\in\mathbb{N}^{\star}$.

a) Határozd meg a k és m természetes számokat, amelyekre a B, M és E pontok kollineárisak!

b) Tudva azt, hogy $k=2$, $m=3$ és $AM\cap BC=\{P\}$, számítsd ki az ACM és MCP háromszögek területeinek az arányát!

Mátéfi István, Marosvásárhely

3. Feladat. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy számtani haladvány és $(b_n)_{n\geq 1}$ egy mértani haladvány. Számítsd ki:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)b_k$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$x+\frac{x}{x-1}+\frac{x^2}{x^2-x+1}=\frac{64}{7}.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

X. osztály

1. Feladat. Oldd meg a $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^x + 10^{\frac{1}{x}} \cdot 5^x = 49 \cdot 2^{2-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Zay Éva, Zilah

2. Feladat. Adott az n nullától különböző természetes szám. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy

$$f\left(x + \frac{1}{2n+2}\right) - \frac{1}{2} \leq (n+1)x - 1 \leq f\left(x - \frac{1}{2n+2}\right) + \frac{1}{2},$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazold, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = 0.$

dr. Bencze Mihály, Brassó

3. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\log_3(x+3) = \log_5(x+5)$;

b) $(x+3)^{\log_3 5} - 2 = (x+5)^{\log_5 3}$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Adott a síkban az A, B, C és D pont úgy, hogy nincs közöttük három kollineáris. Jelölje H_1 illetve H_2 az ABC és az ABD háromszög magasságpontját. Igazold, hogy az A, B, C és D pontok akkor és csakis akkor vannak egy körön, ha a H_1D és a H_2C szakaszok felezőpontja egybeesik!

Zay Éva, Zilah

XI. osztály

1. Feladat. Határozd meg az összes olyan $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre

$$X^2 + 2X = \begin{pmatrix} a+b-1 & b \\ -b & a-b-1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } a > 0 \text{ és } \det(X + I_2) > 0.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

2. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat számtani haladvány, amelynek állandó különbsége e (az Euler-féle szám) és $x_1 > 0$. Értelmezzük az $(y_n)_{n\geq 1}$ és a $(z_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat a következőképpen

$$y_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ és } z_n = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{n}$ határértéket!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nz_n}{y_{3n} - y_{2n}}$ határértéket!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

3. Feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(n \geq 2)$ olyan invertálható mátrixok, amelyekre az $A + B$ mátrix is invertálható és $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Igazold, hogy $|\det(A + B)| = |\det A| = |\det B|$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 = 1$ és

$$(x_{n+1} - 1)(x_n + 1) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Számítsd ki a sorozat határértékét!

dr. Bencze Mihály, Brassó

XII. osztály

1. Feladat. Mutasd ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik három különböző A, B, C pont az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ függvény grafikus képén úgy, hogy $T_{ABC_\Delta} = n^4$.

dr. Bencze Mihály, Brassó
dr. Lukács Andor, Kolozsvár

2. Feladat. Számítsd ki az

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{(x + a\sin x)(x + b\sin x)}\,\mathrm{d}x$$

integrált a következő esetekben:
1) ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq b$;
2) ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a = b$,
ahol x olyan értékeket vehet fel, melyekre értelmezett az integrálban lévő kifejezés.

dr. Bencze Mihály, Brassó
Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

3. Feladat. A $G = (0, \infty)$ halmazon értelmezett „$\circ$” művelet teljesíti az $a^x + a^{x\circ y} + a^y = 2 + a^{x+y}$ összefüggést bármely $x, y \in G$ esetén, ahol $a > 1$.
a) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!
b) Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_k \in G$ minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, akkor mutasd ki, hogy

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{a^{x_i \circ x_j} - 1} \leq \frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n} a^{x_k}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Jelölje rendre $F, G\colon E \to \mathbb{R}$ az $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ függvények egy-egy primitívjét. Határozd meg az f és g függvényeket a következő esetekben:

a) $E = (0, \infty)$, illetve minden $x \in E$ esetén

$$\begin{cases} xf(x) + G(x) &= x, \\ xg(x) + F(x) &= -x. \end{cases}$$

b) $E = \mathbb{R}$, illetve minden $x \in E$ esetén

$$\begin{cases} f(x) + G(x) &= x, \\ g(x) + F(x) &= -x. \end{cases}$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Feladatsorok - II. forduló

IX. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $17^{2^n} + 17^{2^{n-1}} + 1$ osztható 307-tel!

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. Feladat. a) Oldd meg a nemnegatív valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x+y+z+1)(x+y+z+2) = 2 + (x+\sqrt{y})^2 + (y+\sqrt{z})^2 + (z+\sqrt{x})^2.$$

b) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - xy + 45y = 2019.$$

Longáver Lajos, Nagybánya
Kovács Béla, Szatmárnémeti

3. Feladat. Ha $a_1 = 0$ és $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 4a_n$, valamint $a_{n+1} \geq a_n + 1$, $\forall n \geq 1$, akkor igazold, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n-1}{n}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

4. Feladat. Jelölje AD, BE és CF az ABC háromszög belső szögfelezőit, ahol $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ és $F \in (AB)$. Ha az ABD, BCE és CAF háromszögek területeinek egyike a másik kettő számtani középarányosa, akkor igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

dr. Bencze Mihály, Brassó

5. Feladat. Adott az $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ halmaz. Legfeljebb hány eleme lehet az A egy olyan részhalmazának, amelyben bármely két elem összege nem osztható 25-tel?

Spier Tünde, Arad
Vass Ferenc, Szováta

6. Feladat. Határozd meg a

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2} = 2\sqrt{2019}$$

egyenlet összes megoldását, tudva azt, hogy $a < b < c$ prímszámok!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Oláh-Ilkei Árpád, Barót

X. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy

$$\left[\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}\right] = n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ahol az $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. Feladat. Janka és Veronka tervet készít egy négyzet alakú terasz burkolására, amelyhez fehér és szürke, 5 cm oldalhosszú, négyzet alakú mozaiklapokat akarnak használni. Előbb kijelölik a terasz középpontját egy szürke mozaiklappal, ezt 8 fehér mozaiklappal szegélyezik, így egy nagyobb fehér négyzet közepén van egy szürke négyzet. Ilyen módon folytatják a szegélyezést, váltva a színeket, míg a középpontban lévő mozaiklapot 100 fehér és 100 szürke mozaiklap sorral rakják körül, egyre nagyobb koncentrikus négyzeteket alakítva ki. Ezután még két szegélyező sor lerakására van lehetőségük és elhatározzák, hogy érdekesebb mintával rakják körül a teraszt. Előbb egy szürke és egy fehér mozaiklap váltakozásával szegélyeznek, majd az utolsó szegélyezést egy szürke és három fehér lap váltakozásával alakítják ki.

a) Legalább hány szürke, illetve fehér mozaiklapra van szükségük, hogy a terv szerint be tudják fejezni a burkolást?

b) Milyen színű mozaiklapból kellene több, ha az utolsó előtti szegélyezést egy fehér és három szürke lap váltakozásával akarnák kialakítani?

Zay Éva, Zilah

3. Feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A szög mértéke $45°$. Az AD magasság a BC oldalt $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ arányban osztja. Igazold, hogy a H magasságpont a BE magasság felezőpontja!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Igazold, hogy egyetlen olyan n és egyetlen olyan k természetes szám létezik, amelyre

$$2^{17} + 17 \cdot 2^{12} + 2^n = k^2.$$

Zay Éva, Zilah

5. Feladat. Az $1, 2, 3, \ldots, 2019$ számok közül véletlenszerűen kiválasztunk 1347 számot. Igazold, hogy a kiválasztott számok között van három olyan, amelyek közül az egyik a másik kettőnek a számtani közepe!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

6. Feladat. Az ABC egyenlő szárú, hegyesszögű háromszög A szögének mértéke $20°$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt D-ben, az ABD szög szögfelezője pedig E-ben metszi. Az E középpontú, ED sugarú körnek az AB oldallal való, A-hoz közelebbi metszéspontja F.

a) Igazold, hogy az $FEDB$ négyszög körbeírható!

b) Ha $AF = a$ és $ED = b$, számítsd ki a és b függvényében az AE, FB és DC szakaszok hosszát!

c) Igazold, hogy $\frac{a}{b} = 2 \cos 20°$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Koczinger Éva, Szatmárnémeti
Zay Éva, Zilah

XI-XII. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $2019^{2016}-1$ osztható a $2019^{84}+2019^{42}+1$ számmal!

dr. Bencze Mihály, Brassó

2. Feladat. A Kerekasztal körül lévő 12 székre fel van írva a lovagok neve. Ők azonban ezt figyelmen kívül hagyva, véletlenszerűen ülnek le. Mennyi a valószínűsége annak, hogy senki sem ül a saját székén?

Schefler Barna, Budapest

3. Feladat. Mutasd ki, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre a $\sqrt{n}$ felírásában a tizedesvessző utáni első négy számjegy a 2, 0, 1, 9 (ebben a sorrendben)!

Tóth Csongor, Szováta

4. Feladat. Az ABC háromszögben D az AC oldal felezőpontja, F az AD szakasz felezőpontja, illetve $E, G \in (AB)$ úgy, hogy $AE = BG = \frac{1}{4}AB$. Legyen $DE \cap GF = \{P\}$ és $CG \cap BD = \{Q\}$.

a) Igazold, hogy $\dfrac{EP}{PD} = \dfrac{2}{3}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $PQ||AB$.

c) Mutasd ki, hogy $T_{EDG_\Delta} = \dfrac{1}{4}T_{ABC_\Delta}$.

Simon József, Csíkszereda

5. Feladat. Egy hegyesszögű háromszög alapja a és a hozzátartozó magasság m. Rajzolj az alapra egy négyzetet úgy, hogy a négyzet felső két csúcsa is a háromszög egy-egy oldalán legyen. A keletkezett kisebb, az eredetihez hasonló háromszögbe szerkessz hasonlóképpen négyzetet és így tovább. Mekkora a négyzetek területének összege?

Zay Éva, Zilah

6. Feladat. Egy 6×6-os táblát lefedtünk 18 darab 1×2-es dominóval. Bizonyítsd be, hogy bármely lefedés esetén van olyan vízszintes vagy függőleges vonal, ami két részre osztja a táblát, de nem vág ketté egy dominót sem!

Schefler Barna, Budapest

Megoldások - I. forduló

V. osztály

1. Feladat. Egy szigeten kétlábú és hétfejű, valamint négylábú és ötfejű sárkányok laknak. Összesen 58 lábuk és 140 fejük van. Hány sárkány él ezen a szigeten az egyes fajtákból külön-külön?

Simon József, Csíkszereda

1. megoldás.
Ha mindegyik sárkány 2-lábú lenne, akkor $58 : 2 = 29$ sárkány lenne, és ekkor összesen $29 \cdot 7 = 203$ fejük lenne.
Ez $203 - 140 = 63$ fejjel több, mint amennyi van.
Két darab 2-lábú sárkányt egy 4-lábúra cserélve, a lábak száma nem változik, a fejek száma viszont $2 \cdot 7 - 5 = 9$-cel csökken.
Így $63 : 9 = 7$ darab 4-lábú sárkány van, nekik együttesen $7 \cdot 4 = 28$ lábuk van, ami folytán a 2-lábú sárkányoknak összesen $58 - 28 = 30$ lába van. Tehát $30 : 2 = 15$ darab 2-lábú sárkány van.
Összefoglalva, 15 darab 2-lábú és 7-fejű, valamint 7 darab 4-lábú és 5-fejű sárkány él a szigeten.

■

2. megoldás.
Legyen x a 2-lábú és 7-fejű, y pedig a 4-lábú és 5-fejű sárkányok száma.
A 2-lábú és 7-fejű sárkányok lábainak és fejeinek száma összesen: $2x + 7x = 9x$.
A 4-lábú és 5-fejű sárkányok lábainak és fejeinek száma összesen: $4y + 5y = 9y$.
Így $9x + 9y = 58 + 140$, vagyis $9x + 9y = 198$, amiből következik, hogy összesen $x + y = 22$ sárkány él a szigeten.
Ha mindegyik 2-lábú lenne, akkor $22 \cdot 2 = 44$ lábuk lenne.
Egy 2-lábút 4-lábúra cserélve, a lábak száma 2-vel nő.
Így $(58 - 44) : 2 = 14 : 2 = 7$ darab 2-lábú sárkányt kell 4-lábúra cserélni.
Tehát 15 darab 2-lábú és 7-fejű, valamint 7 darab 4-lábú és 5-fejű sárkány él a szigeten.

■

3. megoldás.
Legyen x a 2-lábú és 7-fejű, y pedig a 4-lábú és 5-fejű sárkányok száma. Ekkor $2x + 4y = 58$ és $7x + 5y = 140$.
Így $9x + 9y = 58 + 140$, vagyis $9x + 9y = 198$, amiből következik, hogy összesen $x + y = 22$ sárkány él a szigeten.
Tehát $2x + 2y = 44$ és $2x + 4y = 58$, vagyis $2y = 14$, amiből $y = 7$ és $x = 15$.
Tehát 15 darab 2-lábú és 7-fejű, valamint 7 darab 4-lábú és 5-fejű sárkány él a szigeten.

■

2. Feladat. Adott az $\overline{abcd}$ különböző számjegyekből álló szám, amelyről tudjuk, hogy $\overline{ab} > \overline{cd}$, továbbá azt is, hogy az $\overline{abc}$ szám d-vel való osztási hányadosa 25 és maradéka 1.

a) Határozd meg az $\overline{abcd}$ számot!

b) Határozd meg a $2^{\overline{abcd}}$ hatvány utolsó számjegyét!

c) Igazold, hogy $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{\overline{abcd}}$ szám nem négyzetszám!

Zajzon Csaba, Barót

1. megoldás. a) A feltételek alapján $\overline{abc} = d \cdot 25 + 1$, amiből $c = 1$, vagy $c = 6$.
Mivel $\overline{ab} > \overline{cd}$, következik, hogy $a \geq c$, továbbá a $d \leq 9$ egyenlőtlenségből az $\overline{abc} \leq 226$ feltételt kapjuk, amiből $a \leq 2$.
A számjegyek különbözősége miatt ekkor $c = 1$. Tehát $a = 2$ és d páros. Ugyanekkor $\overline{abc} \geq 200$, amiből a $d \geq 8$ feltételhez jutunk. Figyelembe véve, hogy d páros, következik, hogy $d = 8$.
Utóbbi miatt viszont az $\overline{abc} = 8 \cdot 25 + 1 = 201$ egyenlőséget kapjuk. A számjegyek beazonosítása után, a keresett $\overline{abcd} = 2018$ számhoz jutunk.

b) Jelölje $U(\cdot)$ a paraméterként adott szám utolsó számjegyét és vegyük észre, hogy az

$$U\left(2^1\right) = 2,\ U\left(2^2\right) = 4,\ U\left(2^3\right) = 8,\ U\left(2^4\right) = 6,\ U\left(2^5\right) = 2, \ldots$$

számok ismétlődévé válnak a 2-es szám minden 4-gyel osztható természetes hatványának kiértékelése után.
Mivel $2018 = 4 \cdot 504 + 2$, az előbbi észrevételből következik, hogy

$$U\left(2^{2018}\right) = U\left(2^{4 \cdot 504 + 2}\right) = U\left(2^2\right) = 4$$

lesz a kérdéses hatvány utolsó számjegye.

c) Vegyük észre, hogy

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2018} = 2^{1+2+\ldots+2018}.$$

Mivel az

$$1 + 2 + \ldots + 2018 = \frac{2018 \cdot (2018+1)}{2} = 1009 \cdot 2019$$

értékű összeg páratlan, következik, hogy az adott hatvány nem lehet négyzetszám.

■

3. Feladat. a) Keress olyan p és q prímszámot, amelyre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ összeg reducibilis!

b) Igazold, hogy a $p \neq q$ prímszámok esetén az $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ összeg irreducibilis!

c) Határozd meg a p és q prímszámokat úgy, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{676}{2019}$.

Kocsis Attila Levente, Déva
Zajzon Csaba, Barót

Megoldás. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$.

Ez reducibilis, mivel egyszerűsíthető kettővel.

b) Tudjuk, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{p \cdot q}$, valamint a $p \cdot q$-nak két prímosztója van, a p és a q.

Ha a $\frac{p+q}{p \cdot q}$ tört reducibilis, akkor a $(p+q)$ osztható kellene legyen p vagy q prímszámokkal.

Ha $(p+q) \vdots p$ és tudva, hogy $p \vdots p$, akkor $q \vdots p$, ami azt jelenti, hogy $q = p$, vagy q összetett szám. Ez nem felel meg a feltételnek.

Hasonlóan igazolható az az eset is, amikor $(p+q) \vdots q$.

c) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{676}{2019}$ vagyis $\frac{p+q}{p \cdot q} = \frac{676}{2019}$. A $\frac{676}{2019}$ tört irreducibilis.

A b) alpont szerint a $\frac{p+q}{p \cdot q}$ tört is irreducibilis. Így a fentiekből következik, hogy $p \cdot q = 2019$.

$2019 = 3 \cdot 673$ és mivel a 673 prímszám következtetik hogy $p = 3$ és $q = 673$, vagy $p = 673$ és $q = 3$.

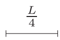
■

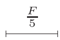
4. Feladat. Az V. osztályban a lányok számának a negyede ugyanannyi, mint a fiúk számának az ötöde. Egy matekfelmérőn senki nem írta meg a 10-est, de 7-esnél gyengébb jegyet sem kapott senki. A jegyek összege 271 lett. Hány lány és hány fiú volt az osztályban?

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás.
A lehetséges jegyek: 7, 8 és 9.
Ezért legalább $271 : 9 = 30$ (maradék $= 1$), míg legfeljebb $271 : 7 = 38$ (maradék $= 5$) tanuló van.

A lányok száma:

A lányok számának (L) negyede: 

egyenlő a fiúk számának (F) ötödével: 

Így a fiúk száma:

A lányok és fiúk együttes létszáma:

vagyis az osztály létszáma egy 9-cel osztható természetes szám.
A 30-tól 38-ig lévő számok közül egyedüli 9-cel osztható szám a 36
A lányok száma: $36 : 9 \cdot 4 = 16$.
A fiúk száma: $36 : 9 \cdot 5 = 20$.

■

5. Feladat. Egy 2019×2019-es négyzet alakú, elemi négyzetekből (mezőkből) álló táblán van egy – a középső mezőt is fedő – négyzet alakú 1006×1006-os letakart rész. A táblán csak függőleges és vízszintes irányban lehet haladni. Nevezzük kenguruugrásnak azt a lépést, amely során **vagy** vízszintesen előbb három, majd azt követően függőlegesen két mezőt, **vagy** függőlegesen előbb három, majd azt követően vízszintesen két mezőt haladunk.

Bejárhatjuk-e a le nem takart részt egyetlen kenguruval kenguruugrásokkal úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk (érintett mezőnek tekintjük az ugrás kiindulási és érkezési mezejét), és az utolsóként érintett mező kenguruugrásnyira legyen attól, amelyről elindultunk?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

1. megoldás.
A táblát a sakktáblához hasonló módon kiszínezzük, például úgy, hogy a bal felső négyzet fekete legyen.
Mivel páratlan számú négyzetünk van, fekete mezőből eggyel több lesz.
A letakart részben egyenlő számú fekete és fehér mező van.
Tehát a kenguru egy olyan tartományban ugrálhat, ahol fekete mezőből eggyel több van, mint fehérből.
A kenguru ugráskor fehér mezőről feketére, míg feketéről fehér mezőre kerül.
Észrevesszük, hogy:

- az első ugrás után a kiindulási és az érkezési mező színt vált, az érintett mezők száma 2;
- a második ugrás után a mező színe ugyanolyan, mint a kiindulási mezőé, az érintett mezők száma pedig 3-ra nő;
- és így tovább...

Mindez azt jelenti, hogy:

- páratlan sorszámú ugrás után az utolsó érintett mező színe eltér a kiindulási mezőétől, valamint az ugrások során érintett mezők száma páros;
- páros sorszámú ugrás után az utolsó érintett mező színe megegyezik a kiindulási mezőével, míg az útvonal mentén érintett mezők száma páratlan.

Mivel a kenguru az ugrásai során páratlan számú mezőt kell érintsen, útvonalát páros számú ugrással kellene bejárja, amely végén a kiindulási mező színével megegyező színű mezőre kellene lépjen.

Ahhoz viszont, hogy kenguruugrásnyira legyen a kiindulási mezőtől, utolsó lépése során ellenkező színű végső mezőre kellene érkezzen. Ezért a kérdéses bejárás lehetetlen.

■

VI. osztály

1. Feladat. Az a, b, c és d olyan nullától különböző természetes számok, amelyekre

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \quad \text{és} \quad \frac{c}{d} = \frac{6}{7}.$$

Határozd meg az a, b, c és d természetes számokat a következő esetekben:

a) $a + b + c + d = 315$;

b) az a szám 50 %-ának, a b szám 40 %-ának, a c szám 30 %-ának és a d szám 20 %-ának az összege 168.

(***)

Megoldás. a) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ és $\frac{c}{6} = \frac{d}{7}$.

Az első aránypár nevezőit szorozzuk 4-gyel, a második nevezőit 3-mal

$\Longrightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$.

Az aránysor nevezőit szorozzuk 2-vel, a harmadik aránypár nevezőit pedig 5-tel

$\Longrightarrow \frac{a}{16} = \frac{b}{24} = \frac{c}{30} = \frac{d}{35} = k$

$a = 16k$, $b = 24k$, $c = 30k$ és $d = 35k \Longrightarrow 16k + 24k + 30k + 35k = 315 \Longrightarrow k = 3$.

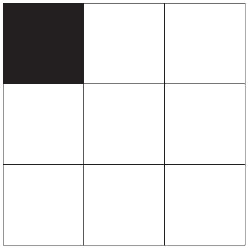
$a = 16 \cdot 3 = 48$, $b = 72$, $c = 90$ és $d = 105$.

b) $16k \cdot \frac{50}{100} + 24k \cdot \frac{40}{100} + 30k \cdot \frac{30}{100} + 35k \cdot \frac{20}{100} = 168$.

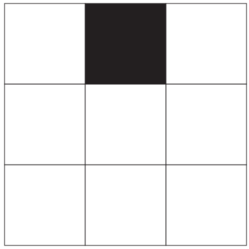
$8k + 9,6k + 9k + 7k = 168 \Longrightarrow 33,6k = 168 \Longrightarrow k = 5$.

$a = 16 \cdot 5 = 80, b = 120, c = 150$ és $d = 175$. ■

2. Feladat. Melyik ábrán tölthetők ki a fehér négyzetek az $1, 2, 3, \ldots, 8$ számokkal úgy, hogy minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és minden sorban illetve minden oszlopban, továbbá mindkét átlón a számok összege ugyanannyi legyen? Írj fel egy megoldást, ha létezik! Amennyiben nem létezik ilyen kitöltés, bizonyítsd be, hogy miért nem!



1. ábra



2. ábra

Durugy Erika, Torda

Megoldás. A számok összege $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 8 \cdot 9 : 2 = 36$.

Egy sorban vagy oszlopban vagy átlón levő számok összege $36 : 3 = 12$.

$12 = 8 + 4 = 7 + 5 \Longrightarrow$ a 12 csak kétféleképpen írható fel két szám összegeként az $1, 2, \ldots, 8$ számok közül.

Az 1. ábrán a sötét négyzetet tartalmazó sorba, oszlopba és átlóba pontosan két számot kell írni.

Ezek összege 12 kell legyen, ez nem lehetséges.

A 2. ábra a kért feltételekkel kitölthető. Egy ilyen kitöltés az alábbi ábrán látható.

7		5
2	4	6
3	8	1

Egy helyes kitöltés

■

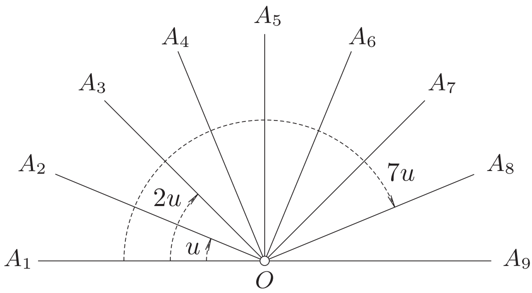
Megjegyzés. Ha nincs helyes kitöltése, a 2. ábrának, akkor 2 pont adható arra, ha megindokolja, hogy csak egy sorba és egy oszlopba kell két-két számot írni úgy, hogy az összegük 12 legyen.

3. Feladat. Az $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots, OA_9$ olyan egymástól különböző félegyenesek, amelyekre $\widehat{A_1OA_2} \equiv \widehat{A_2OA_3} \equiv \widehat{A_3OA_4} \equiv \ldots \equiv \widehat{A_8OA_9}$ és $\widehat{A_1OA_9} = 180°$.

a) Hány szöget határoznak meg az adott félegyenesek?

b) Számítsd ki az a) pontban kapott szögek mértékének összegét!

(***)



Megoldás. a) $A_1OA_2, A_2OA_3, \ldots, A_8OA_9$ szögek $\ldots$ 8 darab;

$A_1OA_3, A_2OA_4, \ldots, A_7OA_9$ szögek $\ldots$ 7 darab;

$\vdots$

A_1OA_8, A_2OA_9 szögek $\ldots$ 2 darab;

Az A_1OA_9 szög két irányba vehető fel $\ldots$ 2 darab.

Minden eset 0,5 pontot ér, összesen

A szögek száma: $8 + 7 + \ldots + 3 + 2 + 2 = 37$.

b) Legyen $\widehat{A_1OA_2} = u \Longrightarrow u = 180° : 8 = 22°30'$.

Az u mértékű szögből 8 darab, a $2u$ mértékűből 7 darab,

..., a $7u$ mértékűből 2 darab, a $8u$ mértékűből is 2 darab van.

Ezek összege:

$S = 8 \cdot u + 7 \cdot 2u + 6 \cdot 3u + 5 \cdot 4u + 4 \cdot 5u + 3 \cdot 6u + 2 \cdot 7u + 2 \cdot 8u = 128u.$

$S = 128 \cdot 22°30' = 2880°.$

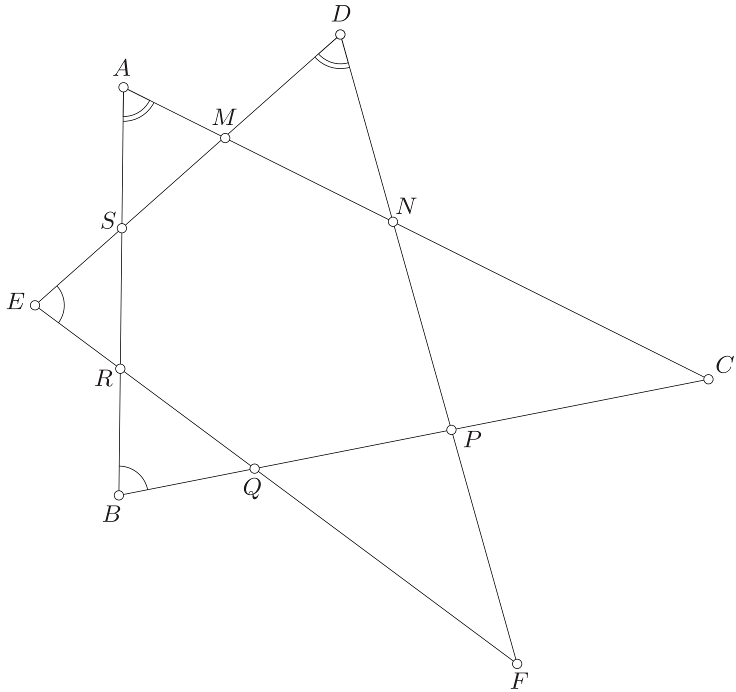
■

Megjegyzés. 36 szöggel való helyes számítás esetén maximálisan 9,5 pont érhető el.

4. Feladat. Az ábrán látható ABC és DEF háromszögekben $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ és $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$. Tudjuk, hogy az AC oldal a DE és DF oldalakat az M és N pontokban metszi, a BC oldal az FD és FE oldalakat a P és Q pontokban metszi, az AB oldal pedig az ED és EF oldalakat az S és R pontokban metszi.

a) Igazold, hogy $\widehat{MNP} \equiv \widehat{PQR} \equiv \widehat{RSM}$!

b) Ha tudjuk, hogy $\widehat{SMN} + \widehat{NPQ} + \widehat{QRS} = 330°$, számítsd ki az $\widehat{MNP}$ mértékét!



Simon József, Csíkszereda

Megoldás. a) Az AMS és DMN háromszögekben $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ és $\widehat{AMS} \equiv \widehat{DMN}$ (csúcsszögek) $\Longrightarrow$ a harmadik szögük is kongruens, azaz $\widehat{ASM} \equiv \widehat{DNM}$.

$\widehat{RSM} \equiv \widehat{MNP}$, mert az előbbi kongruens szögek kiegészítő szögei.

Az ABC és DEF háromszögekben $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ és $\widehat{B} \equiv \widehat{E} \Longrightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{F}$.

Ugyanígy a CNP és FQP háromszögekben $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$ és $\widehat{NPC} \equiv \widehat{QPF}$ (csúcsszögek) $\Longrightarrow \widehat{CNP} \equiv \widehat{FQP}$.

Ezek kiegészítő szögei $\widehat{MNP} \equiv \widehat{PQR} \Longrightarrow \widehat{MNP} \equiv \widehat{PQR} \equiv \widehat{RSM}$.

b) $\widehat{MNP} \equiv \widehat{PQR} \equiv \widehat{RSM} \Longrightarrow \widehat{ASM} \equiv \widehat{CNP} \equiv \widehat{BQR}$.

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{SMN} = \widehat{A} + \widehat{ASM} \\ \widehat{NPQ} = \widehat{C} + \widehat{CNP} \\ \widehat{QRS} = \widehat{B} + \widehat{BQR} \end{array}\right\}.$$

Az egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, azt kapjuk, hogy:
$\widehat{SMN} + \widehat{NPQ} + \widehat{QRS} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{ASM} + \widehat{CNP} + \widehat{BQR}$.

Az adatokat behelyettesítve: $330^\circ = 180^\circ + 3 \cdot \widehat{CNP} \Longrightarrow \widehat{CNP} = 50^\circ$.

Ennek kiegészítő szöge: $\widehat{MNP} = 130^\circ$.

■

5. Feladat. Szakértők egy gyermektábor kibővítésén dolgoztak. Tervezésük szerint 30 munkás 90 nap alatt tud felépíteni egy üdülőházat. Miután 30 munkás 10 napot dolgozott, érkezett 10 munkás segíteni. Velük együtt dolgoztak 10 napot, majd 20 munkás eltávozott. Az ott maradt munkások 10 napon át folytatták a munkát, majd jött még 5 munkás. Velük együtt dolgoztak 10 napot, majd csatlakozott hozzájuk még 6 munkás. Ebben az összetételben addig dolgoztak együtt, amíg az üdülőház elkészült. A munkások egyformán jól dolgoztak. Mennyi idő alatt készült el az üdülőház?

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. I. szakasz: 10 napot dolgoztak, a 30 munkásnak maradt 80 napi munkája.

II. szakasz: érkezett 10 munkás:

$$\left.\begin{array}{l} 30 \text{ munkás } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 80 \text{ nap} \\ 40 \text{ munkás } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ x \text{ nap} \end{array}\right\}.$$

Mivel a munkások száma és a munka elvégzéséhez szükséges idő fordítottan arányos mennyiségek $\Longrightarrow$ a 40 munkás $x = \frac{30 \cdot 80}{40} = 60$ napot kellene dolgozzon.

10 napi munka után 40 munkásnak még 50 napi munkája maradt.

III. szakasz: eltávozott 20 munkás:

$$\left.\begin{array}{r} 40 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ 50 \text{ nap} \\ 20 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ y \text{ nap} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = \frac{40 \cdot 50}{20} = 100 \text{ napot kéne}$$

dolgozzon.

10 napot dolgoztak, hátra van még 20 munkásnak 90 napi munkája.

IV. szakasz: érkezett 5 munkás:

$$\left.\begin{array}{r} 20 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ 90 \text{ nap} \\ 25 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ z \text{ nap} \end{array}\right\} \Longrightarrow z = \frac{20 \cdot 90}{25} = 72 \text{ napra van}$$

szükség.

10 napot dolgoztak, hátra van még 25 munkásnak 62 napi munkája.

V. szakasz: érkezett 6 munkás:

$$\left.\begin{array}{r} 25 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ 62 \text{ nap} \\ 31 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ t \text{ nap} \end{array}\right\} \Longrightarrow t = \frac{25 \cdot 62}{31} = 50 \text{ nap alatt}$$

fejezik be. Összesen $10 + 10 + 10 + 10 + 50 = 90$ napot dolgoztak. ■

Második megoldás.

$$\left.\begin{array}{r} 30 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{9} \text{ rész} \\ 10 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{27} \text{ rész} \\ 5 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{54} \text{ rész} \end{array}\right\}.$$

I. szakasz: 10 napot dolgoztak:

30 munkás .... 10 nap .... $\frac{1}{9}$ rész

II. szakasz: érkezett 10 munkás és 10 napot dolgoztak:

40 munkás .... 10 nap .... $\frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ rész.

III. szakasz: eltávozott 20 munkás és 10 napot dolgoztak:

20 munkás .... 10 nap .... $\frac{2}{27}$ rész.

IV. szakasz: érkezett 5 munkás és 10 napot dolgoztak:

25 munkás .... 10 nap .... $\frac{2}{27} + \frac{1}{54}$ rész.

Eddig elkészült $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{54} = \frac{23}{54}$ rész, maradt $\frac{31}{54}$ rész.

V. szakasz: érkezett 6 munkás $\Longrightarrow$ 31-en dolgoztak végig.

$$\left.\begin{array}{r} 30 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{1}{9} \text{ rész} \\ 31 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ x \text{ rész} \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{31 \cdot \frac{1}{9}}{30} =$$

$\frac{31}{270}$ rész.

$$\left.\begin{array}{r} 31 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ 10 \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{31}{270} \text{ rész} \\ 31 \text{ munkás } \dots\dots\dots\dots\dots\ y \text{ nap } \dots\dots\dots\dots\dots\ \frac{31}{54} \text{ rész} \end{array}\right\}.$$

$y = \frac{10 \cdot \frac{31}{54}}{\frac{31}{270}} = 10 \cdot \frac{31}{54} \cdot \frac{270}{31} = 50$ nap alatt fejezik be.

Összesen $10 + 10 + 10 + 10 + 50 = 90$ napot dolgoztak.

■

VII. osztály

1. Feladat. a) Írd fel a 4 és az 505 számok számtani és mértani középarányosát, majd helyezd őket növekvő sorrendbe!

b) Igazold, hogy

$$\frac{\sqrt{2018}}{1011}+\frac{\sqrt{2019}}{676}+\frac{\sqrt{2020}}{509}<\frac{3}{2}.$$

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. a) A következőket ekvivalens egyenlőtlenségeket írhatjuk fel

$$\sqrt{4\cdot 505}<\frac{4+505}{2}\qquad \sqrt{2020}<\frac{509}{2}\qquad \frac{8080}{4}<\frac{259081}{4}.$$

b) Az igazolandó egyenlőtlenséget ekvivalens módon átalakítjuk és rendre a következőket kapjuk:

$$\frac{\sqrt{2018}}{1011}+\frac{\sqrt{2019}}{676}+\frac{\sqrt{2020}}{509}<\frac{3}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2\cdot 1009}}{2+1009}+\frac{\sqrt{3\cdot 673}}{3+673}+\frac{\sqrt{4\cdot 505}}{4+505}<\frac{3}{2}$$

Az a) ponthoz hasonlóan igazolható hogy

$$\frac{\sqrt{2\cdot 1009}}{2+1009}<\frac{1}{2}\qquad \frac{\sqrt{3\cdot 673}}{3+673}<\frac{1}{2}\qquad \frac{\sqrt{4\cdot 505}}{4+505}<\frac{1}{2}.$$

Ezek alapján pedig

$$\frac{\sqrt{2\cdot 1009}}{2+1009}+\frac{\sqrt{3\cdot 673}}{3+673}+\frac{\sqrt{4\cdot 505}}{4+505}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

■

2. Feladat. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $E=1^n+3^n+5^n+7^n+9^n$ prímszám!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. 1) Az $E = 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ utolsó számjegyeit vizsgálva: $U(1^n) = 1$; $U(3^n) \in \{1, 3, 7, 9\}$; $U(5^n) = 5$; $U(7^n) \in \{1, 3, 7, 9\}$ és $U(9^n) \in \{1, 9\}$.

A következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} &\text{ha } n = 4k+1, \text{ akkor } U(E) = 5 \\ &\text{ha } n = 4k+2, \text{ akkor } U(E) = 5 \\ &\text{ha } n = 4k+3, \text{ akkor } U(E) = 5 \end{aligned}$$

Mindhárom esetben E osztható 5-tel. Mivel E prímszám, így $E = 5$. Ez be is következik az $n = 0$ esetben. Ez előbbiek alapján az is következik, hogy $E \geq 5$.

2) Jelöljük M_3-mal a 3-mal osztható természetes számok halmazát. Ha $n = 4k$, akkor

$$\begin{aligned} E &= 1 + M_3 + (6-1)^{4k} + (6+1)^{4k} + M_3 \\ &= 1 + M_3 + (M_3 + 1) + (M_3 + 1) + M_3 = M_3. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy $n = 4k$ esetben E osztható 3-mal. De E prím és nagyobb vagy egyenlő, mint 5 így a feladatnak az $n = 0$ megoldáson kívül nincs más megoldása.

■

Megoldás az első részre, ha $n = 2k + 1$. Jelölje M_5 az 5 többszöröseinek halmazát. Ekkor

$$\begin{aligned} E &= 1 + (5-2)^{2k+1} + M_5 + (5+2)^{2k+1} + (10-1)^{2k+1} \\ &= 1 + (M_5 - 2^{2k+1}) + M_5 + (M_5 + 2^{2k+1}) + M_5 - 1 = M_5. \end{aligned}$$

Ezek alapján $E \geq 5$. Ha $n = 0$, akkor $E = 5$ prím. A (2) pontban leírtak igazak $n = 2k$ esetben alapján az $n = 0$ az egyetlen megoldás. ■

3. Feladat. Boldizsár 216 egyforma sárga színű kis kockát összeragasztva egy nagy tömör kockát készített. Ezután a lapjait piros, kék és zöld színűre festette úgy, hogy a szemben lévő lapok ugyanolyan színűek legyenek. Szárítás után a kockát véletlenül elejtette így az, az eredeti kis kockáira hullott szét. Nem adta fel, kisebb méretű, több darabból álló, tömör kockákat ragasztott össze belőlük.

a) Legtöbb hány olyan háromszínű kockát készíthetett, melyeknek szemközti oldalai ugyanolyan színűek?

b) Összerakható-e több egyszínű, különböző méretű, nagyobb tömör kocka a 216 széthullott kis kockából úgy, hogy minden kockát felhasználjunk?

c) Igazold, hogy bármely k pozitív egész szám esetén 6^{3k} felírható három teljes köb összegeként!

Zay Éva, Zilah

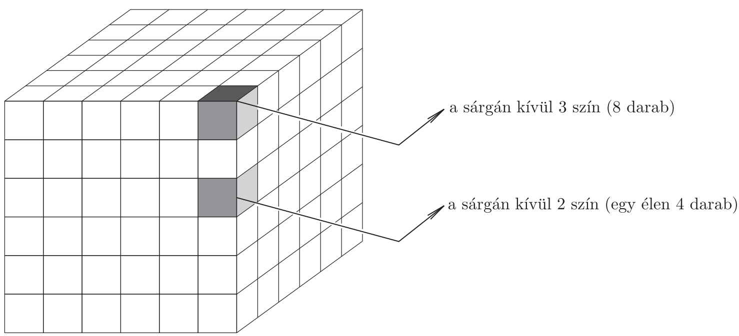
Megoldás. A legtöbb kockát akkor kapjuk, ha 8 kis kockát rakunk nagyobb kockává össze.

Háromszínű kockát olyan kis kockákból rakhatunk ki, melyeknek három szomszédos oldala páronként különböző színű. Az eredeti (nagy) kockának a csúcsaiban voltak ilyenek, a sarokkockákból pont összejön egy új kocka.

Azok a kockák is számba jönnek, melyek három oldala közül pontosan kettő volt lefestve, hisz az eredeti, sárga színt is figyelembe véve, ezek is háromszínűek.

Azt kell megszámolnunk tehát, hogy az eredeti nagy kockában hány olyan kis kocka volt, melynek két szomszédos oldalát lefestették. Ezek száma: piros-kék kockából 16, kék-zöld kockából 16 és piros-zöld kockából szintén 16. Mindenik típusból 2, összesen 6 kockát kapunk.

Tehát legtöbb 7 ilyen kocka rakható ki.



b) Igen: minden kocka felhasználható, hisz nincs olyan kocka, melynek ne lenne legalább 3 szomszédos sárga oldala. Felírható, hogy $3^3 +$

$4^3 + 5^3 = 6^3$. Különböző méretű kockákhoz rendre $27, 64, 125$ kocka, vagyis összesen 216 kocka szükséges.

c) Az állítás $k = 1$-re igaz. $k \geq 2$ esetben $k = n + 1$, ahol $n \geq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} 6^{3(n+1)} &= 6^{3n+3} = 6^3 \cdot 6^{3n} = (3^3 + 4^3 + 5^3)6^{3n} \\ &= (3 \cdot 6^n)^3 + (4 \cdot 6^n)^3 + (5 \cdot 6^n)^3 \end{aligned}$$

■

4. Feladat. Hörcsögh úr büszke fiaira, egyformán dolgozó, szorgalmas hörcsögfiúk. Egy nap a tanyájuk közelében, az odújuktól egyforma távolságra két halom búzát találtak. Az egyikben kétszer több búzaszem volt, mint a másikban.

Hörcsögh úr a fiaira bízta a halmok beszállítását. Mindannyian a nagyobbik halomból kezdték hordani a búzát. Egy óra elteltével a fiúk fele átment a kisebbik halomhoz és onnan szállította tovább a búzát az odúba. Újabb egy óra elteltével a nagyobbik halom betakarításával végeztek, és mindenki megpihent. Közben kiszámolták, hogyha három hörcsögfiú még két órát dolgozna, minden búzaszem betakarításra kerülne.

a) Hány fia van Hörcsögh úrnak?

b) Ha a hörcsögfiúk pihenő nélkül, mindannyian tovább dolgoznak, még mennyi időre lett volna szükségük a teljes betakarításhoz?

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás. A feladat szövegéből kiderül, hogy a fiúk száma páros.

Jelöljük a fiúk számának felét x-szel. Legyen egy egység az x fiú által 1 óra alatt behordott búzamennyiség. Ekkor elmondhatjuk, hogy az első órában a nagyobbik halomból 2 egységnyi, a második órában 1 egységnyi búzát hordtak el, ekkor a nagyobbik halommal végeztek is. Tehát a nagyobbik halomban 3 egységnyi búza volt.

A második óra alatt a kisebbik halomból is elhordtak egy egységnyi búzát. Maradt tehát fél egységnyi a kisebbik halomból, hiszen a kisebbik halom kétszer kevesebb búzát tartalmazott, mint a nagyobbik.

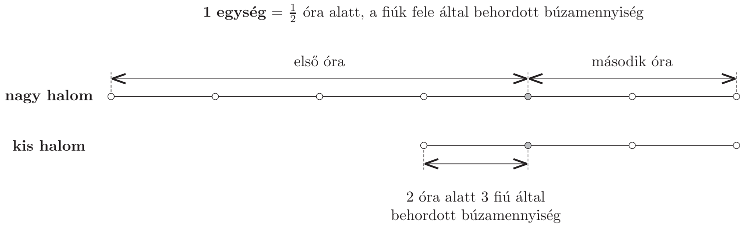
A fél egység elhordásához 3 fiú két órányi munkája kellett, az egészhez 12 fiú egyórányi munkája.

A fiúk felének száma 12, tehát Hörcsögh úrnak 24 fia van.

b) A 24 fiú 8-szor kevesebb idő, 15 perc alatt hordta volna be a maradék búzát.

■

Megjegyzés. A feladat ábrázolás módszerével is megoldható. Ekkor egy egység búza legyen egy fél óra alatt a fiúk fele által behordott búzamennyiség. Ekkor 2 óra alatt 8 egység búzát hordtak be, ezt 24 szorgos hörcsögfiú tehette. Ha 3 fiú két óra alatt, akkor 24 fiú 8-szor kevesebb idő, 15 perc alatt hordta volna be a maradék búzát.



5. Feladat. Az ABC háromszögben F az AC szakasz, E pedig a BF szakasz felezőpontja. Legyen $AE \cap BC = \{G\}$ és $FG \cap AB = \{D\}$. Igazold, hogy:

a) $EG = \frac{1}{3}AE$;

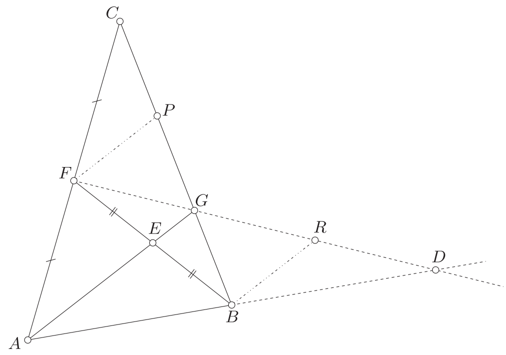
b) $[AB] \equiv [BD]$;

c) G az ACD háromszög súlypontja;

d) $\frac{T_{EFG_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}} = \frac{1}{12}$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Tekintsük a mellékelt ábrát.



a) Legyen $FP||AG, P \in BC$. Az AGC háromszögben $[FP]$ középvonal, ahonnan $FP = \frac{AG}{2}$.

A BFP háromszögben $EG||FP$, vagyis az $[EG]$ középvonal, ahonnan $EG = \frac{FP}{2}$.

Így $EG = \frac{AG}{4}$, ahonnan $EG = \frac{1}{3}AE$.

b) I. megoldás:

Legyen $BR||AG$, vagyis FBR háromszögben $[EG]$ középvonal, ahonnan $BR = 2EG$.

Mivel $EG = \frac{AG}{4}$, így azt kaptuk, hogy $BR = \frac{AG}{2}$.

Viszont azt is tudjuk, hogy $BR||AG$, tehát $[BR]$ középvonal a DAG háromszögben, ahonnan $[AB] \equiv [BD]$.

II. megoldás: Az ABC háromszögben D, G és F kollineáris pontok, ahol $D \in AB, G \in BC$ és $F \in AC$. Menelaosz tételéből következik, hogy $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{GB}{GC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$.

Ebbe behelyettesítve $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1$, ahonnan $DA = 2DB$, vagyis $[AB] \equiv [BD]$.

c) Az ADC háromszögben $[BC]$ és $[DF]$ oldalfelezők, $BC \cap DF = \{G\}$, ahonnan következik, hogy G az ACD háromszög súlypontja.

d) Mivel $EF = \frac{1}{2}BF$ és $BG = \frac{1}{3}BC$, így $T_{EFG} = \frac{1}{2}T_{BFG}$, valamint $T_{BFG} = \frac{1}{3}T_{BFC}$. Ahonnan $T_{EFG} = \frac{1}{6}T_{BFG}$.

Valamint tudjuk, hogy $T_{FBC} = \frac{1}{2}T_{ABC}$, vagyis $\frac{T_{EFG}}{T_{ABC}} = \frac{1}{12}$.

■

VIII. osztály

1. Feladat. Az $n \in \mathbb{N}^*$ természetes számot *szerencsésnek* nevezzük, ha n^2 felírható n darab egymásutáni természetes szám összegeként. Bizonyítsd be, hogy:

1) a 13 szerencsés szám;

2) egy nullától különböző természetes szám akkor és csak akkor szerencsés, ha páratlan!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. 1) Ha a 13 szerencsés szám, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{N}^*$, amelyre

$$\begin{aligned} 13^2 &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+12) \\ &= 13a + 6 \cdot 13. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy $13 = a + 6$, tehát $a = 7$. Összegezve, igazoltuk, hogy a 13 szerencsés szám és

$$13^2 = 7 + 8 + 9 + \cdots + 19.$$

2) A $k \in \mathbb{N}^*$ akkor és csak akkor szerencsés, ha létezik olyan $a \in \mathbb{N}^*$, amelyre

$$\begin{aligned} k^2 &= a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k-1) \\ &= ka + \frac{k(k-1)}{2}. \end{aligned}$$

A fenti összefüggés alapján $k = a + \dfrac{k-1}{2}$. Mivel $k, a \in \mathbb{Z}$, innen következik, hogy $\dfrac{k-1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Ez viszont csak akkor lehetséges, ha k páratlan. Összegezve, a $k \in \mathbb{N}^*$ akkor és csak akkor szerencsés, ha létezik $n \in \mathbb{N}$, amelyre $k = 2n + 1$ és ebben az esetben

$$k^2 = (2n+1)^2 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (3n+1).$$

■

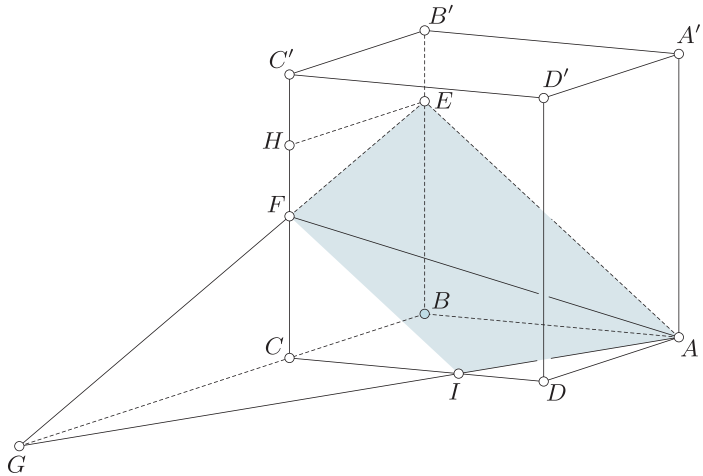
2. Feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 4 cm. A BB' és CC' éleken felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $AE = 5$ cm és $AF = 6$ cm. Határozd meg az (AEF) sík és a kocka síkmetszetének kerületét!

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás. Kiszámítjuk az EF szakasz hosszát. Az ABE, illetve ACF háromszögekben Pitagorasz tételéből következik, hogy $EB^2 = AE^2 - AB^2$ és $FC^2 = AF^2 - AC^2$, tehát

$$EB = 3 \text{ cm} \quad \text{és} \quad FC = 2 \text{ cm}.$$

Megszerkesztjük a $B'C'$-tel párhuzamos szakaszt az E ponton keresztül, amely a CC' élet a H pontban metszi. Ekkor a HF szakasz hossza $EB - FC = 1$ cm. Az EHF háromszög H-ban derékszögű, tehát $EF^2 = FH^2 + EH^2$ és így $EF = \sqrt{17}$ cm. Megszerkesztjük az (AEF) sík és a kocka síkmetszetét.



Legyen $EF \cap BC = \{G\}$ és $AG \cap DC = \{I\}$. Az I és F pontok a (DCC') síkban helyezkednek el, tehát a keresett síkmetszet az $AIFE$ négyszög. Kiszámítjuk az AI és FI szakasz hosszát. Az EBG háromszögben a hasonlóság alaptételéből következik, hogy $\frac{GC}{GB} = \frac{FC}{EB}$, ahonnan származtatással

$$\frac{GC}{GB - GC} = \frac{FC}{EB - FC}.$$

Innen következik, hogy $BC = GB - GC$, tehát $GC = 8$ cm. Másrészt, $AG^2 = AB^2 + BG^2 = 12^2 + 4^2$, tehát $AG = 4\sqrt{10}$ cm. Az ABG háromszögben $IC||AB$, a hasonlóság alaptételéből tehát következik, hogy

$$\frac{AG}{IG} = \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{IC}.$$

Származtatással $\frac{AG}{AG-IG} = \frac{GB}{GB-GC}$, ahonnan $\frac{4\sqrt{10}}{AI} = \frac{12}{4}$, vagyis $AI = \frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm. Végül $IC = \frac{2}{3}AB = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ cm. Mivel $FI||EA$, hasonló módon $FI = \frac{2}{3}EA = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ cm.

Összegezve a kapott eredményeket,

$$K_{AEFI} = AE + EF + FI + IA = \left(8\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{10}}{3} + \sqrt{17}\right) \text{ cm.}$$

■

3. Feladat. Az a, b, c, d valós számok esetén legyen

$$S = a + b + c + d \quad \text{és} \quad P = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

1) Fejezd ki az $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$ összeget csak az S és P segítségével!
2) Ha $S = 4$ és $P = 6$, akkor határozd meg az $a^{2019}+b^{2019}+c^{2019}+d^{2019}$ értékét!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. 1) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E &= (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &= 3(a + b + c + d)^2 - 8(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &= 3S^2 - 8P. \end{aligned}$$

2) Ha $S = 4$ és $P = 6$, akkor az 1)-es alpont alapján $E = 0$, viszont ez csak akkor lehetséges, ha $a = b = c = d = 1$. Innen következik, hogy $a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} + d^{2019} = 4$. ■

4. Feladat. A gyereknapon 17 gyerek közül mindenki játszik egy játékot mindegyik társával. Sorshúzással döntik el, hogy sakkot, teniszt vagy amőbát. Mutasd ki, hogy van három olyan gyerek, aki egymás között ugyanazt a játékot játszotta!

Zákány Mónika, Nagybánya
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Egy gyereket kiválasztva, ő 16 másik gyerekkel játszik. Ekkor a skatulyaelv alapján biztos, hogy ez a gyerek 6 játszmában ugyanazt a játékot játszotta, mivel $3 \cdot 5 < 16$. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy ez a játék a sakk volt. A 6 gyerek közül ha van kettő, aki egymás közt sakkot játszott, akkor megvan a keresett hármas.

Ellenkező esetben a hat gyerek egymás közt amőbát vagy teniszt játszott. E hat diák közül az egyik legalább hárommal ugyanazt a játékot játszotta (mert $2 \cdot 2 < 5$, és ismét feltételezhetjük, hogy ez a játék az amőba volt. Most ebből a három gyerekből ha ketten amőbáztak egymással, akkor ismét megvan a keresett hármas,
különben pedig három gyerek teniszezett az egymás közti játékokban. Ebben az esetben is megvan a keresett hármas. ■

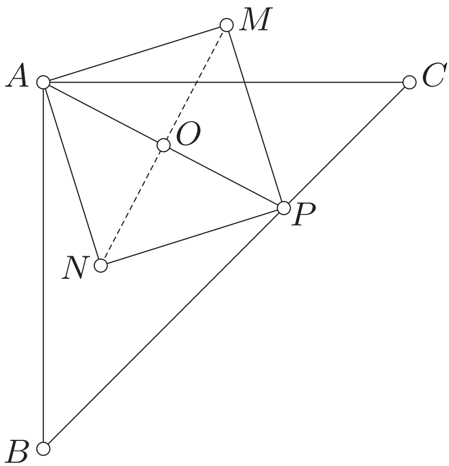
5. Feladat. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög BC átfogóján felveszünk egy P tetszőleges pontot. Az APC háromszög köré írt kör középpontját jelölje M, és legyen N az M pont AP szerinti szimmetrikusa.
1) Igazold, hogy az $ANPM$ négyszög körbeírható!
2) Hol kell elhelyezkedjen a P pont úgy, hogy a BC oldal az $ANPM$ négyszög köré írt kör érintője legyen?
3) Mutasd ki, hogy az N pont az APB háromszög köré írt kör középpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. 1) Legyen $AP \cap MN = \{O\}$. Mivel $MA \equiv MP$ és $MO \perp AP$, ezért MO az AP szakasz felezőmerőlegese. Tehát $AO \equiv OP$, $MO \equiv ON$ és $MN \perp AP$, és így az $ANPM$ négyszög rombusz.

Ugyanakkor az $\widehat{ACP}$ az AP körívhez tartozó kerületi szög, ezért $m(\overset{\frown}{AP}) = 2 \cdot m(\widehat{ACP}) = 90°$. Másrészt, $\widehat{AMP}$ az AP körívhez tartozó

középponti szög, tehát $m(\widehat{AMP}) = m(\overset{\frown}{AP}) = 90°$.
Az előbbiek alapján az $ANPM$ négyszög négyzet, tehát körbeírható.



2) Ha BC érintője az $AMPM$ köré írt körnek, akkor $OP \perp BC$. Innen következik, hogy $AP \perp BC$. Viszont $AB \equiv AC$, ezért AP oldalfelező, tehát P a BC oldal felezőpontja.
3) Az ANB és AMC háromszögekben $AB \equiv AC$, $AN \equiv AM$ és $\widehat{BAN} \equiv \widehat{CAM}$, ahonnan kapjuk, hogy $ANB_\Delta \equiv AMC_\Delta$, vagyis $BN \equiv MC$. Másrészt, $m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{CAM}) = 90° - m(\widehat{NAC})$. Felhasználva, hogy $MA \equiv MP \equiv MC$, hogy $ANPM$ négyzet, illetve, hogy $BN \equiv MC$, következik, hogy $BN \equiv AN \equiv PN$. Ez viszont azt jelenti, hogy N az APB háromszög köré írt kör középpontja. ■

IX. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ esetén

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3}\right]=3n+3,$$

ahol $[x]$ az x egész részét jelöli!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Tudjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned}&\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3}=\\ =&\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{(n+1)^2+3}+\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\ \geq& n+\frac{1}{2}+n+1+n+\frac{3}{2}=3n+3,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}&\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3}\leq\\ \leq&3\sqrt{\frac{n^2+n+1+n^2+2n+4+n^2+3n+3}{3}}=\\ =&3\sqrt{n^2+2n+\frac{8}{3}}<3n+4.\end{aligned}$$

Vagyis $3n+3 \leq \sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3} < 3n+4$, bármely $n \geq 2$ természetes számra, ahonnan

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2n+4}+\sqrt{n^2+3n+3}\right]=3n+3$$

. ■

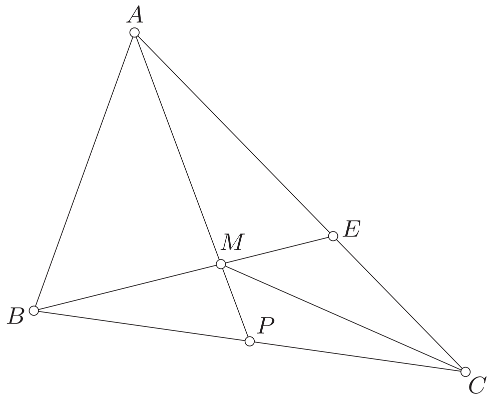
2. Feladat. Az ABC háromszög síkjában felvesszük az E és M pontokat úgy, hogy $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AC}$ és $k\cdot\overrightarrow{AM}+3\cdot\overrightarrow{BM}+m\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$, ahol $k, m \in \mathbb{N}^\star$.

a) Határozd meg a k és m természetes számokat, amelyekre a B, M és E pontok kollineárisak!

b) Tudva azt, hogy $k=2$, $m=3$ és $AM \cap BC=\{P\}$, számítsd ki az ACM és MCP háromszögek területeinek az arányát!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. a) Tekintsük a mellékelt ábrát.



Az $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$ feltételből, valamint az aránypárok származtatási tulajdonságából rendre az $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$, illetve az $\frac{AE}{AC-AE} = \frac{3}{5-3}$ arányokhoz jutunk, ahonnan az $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ egyenlőséget kapjuk. Következésképpen az

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} \cdot \overrightarrow{MC}$$

összefüggéshez jutunk, amiből az

$$\overrightarrow{ME} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{MC} \tag{1}$$

egyenlőséget nyerjük.

Ugyanakkor a $k \cdot \overrightarrow{AM} + 3 \cdot \overrightarrow{BM} + m \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ feltételből a

$$\overrightarrow{BM} = \frac{k}{3} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{m}{3}\overrightarrow{MC} \tag{2}$$

egyenlőséget kapjuk .

A B, M és E pontok kollineárisak, ha létezik $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ szám úgy, hogy

$$\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{ME}. \tag{3}$$

Az (1)-es, (2)-es és a (3)-as összefüggésből a

$$\frac{k}{3} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{m}{3} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{2\alpha}{5} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{3\alpha}{5} \cdot \overrightarrow{MC}$$

egyenlőséghez jutunk. Az $\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{MC}$ vektorok nem kollineárisak, így

$$\frac{k}{3} = \frac{2\alpha}{5} \quad \text{és} \quad \frac{m}{3} = \frac{3\alpha}{5}.$$

Tehát a $2m = 3k$ egyenlőséghez jutunk. Következésképpen a keresett számok $k = 2a$, iletve $m = 3a$ alakúak, ahol $a \in \mathbb{R}^\star$.

b) Ha $k = 2$ és $m = 3$, akkor $\alpha = \frac{5}{3}$ és $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{ME}$. Felírva a BEC háromszögben az A, M és P pontokra Menelaosz tételét, a

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EM}{MB} = 1$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan a $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$ összefüggésből a $\frac{BP}{PC} = 1$ arányt kapjuk. Ha az APC háromszögben a B, M és E pontokra is felírjuk a Menelaosz-tételt, az

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{CP} \cdot \frac{PM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{PM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MP} = 3$$

arányt kapjuk. Következésképpen

$$\frac{T_{AMC_\Delta}}{T_{MPC_\Delta}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot d\,(C, AM)}{\frac{1}{2} \cdot MP \cdot d\,(C, AM)} = 3.$$

■

3. Feladat. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy számtani haladvány és $(b_n)_{n\geq 1}$ egy mértani haladvány. Számítsd ki:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)a_k$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)b_k$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. a) Jelöljük a számtani haladvány állandó különbségét r-rel. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$
$$= a_1 + (a_1+a_2) + (a_1+a_2+a_3) + \cdots + (a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(a_1+a_2+\cdots+a_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(a_1+a_k)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(2a_1+(k-1)r)}{2}$$
$$= a_1\sum_{k=1}^{n}k + \frac{r}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k-1) = a_1\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)r}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(a_1 + \frac{(n-1)r}{3}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2a_1+(a_1+(n-1)r)}{3}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2a_1+a_n)}{6}.$$

b) Jelöljük a mértani haladvány állandó különbségét q-val. Ekkor, ha $q \neq 1$ írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)b_k = \sum_{k=1}^{n}(b_1+b_2+\cdots+b_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{b_1(1-q^k)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}\sum_{k=1}^{n}(1-q^k)$$
$$= \frac{b_1}{1-q}\left(n - \frac{q-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$= \frac{b_1(n-(n+1)q+q^{n+1})}{(1-q)^2}.$$

Ha $q=1$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)b_k = b_1\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = b_1\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$
$$= \frac{b_1 n(n+1)}{2}.$$

■

4. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$x + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2-x+1} = \frac{64}{7}.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. A létezési feltétel $x \neq 1$.

Legyen $x + \frac{x}{x-1} = t = \frac{x^2}{x-1}$.

Ekkor

$$\frac{x^2}{x^2-x+1} = \frac{\frac{x^2}{x-1}}{\frac{x^2}{x-1} - 1} = \frac{t}{t-1}.$$

Így az egyenlet a következő alakra hozható:

$$t + \frac{t}{t-1} = \frac{64}{7} \iff 7t^2 - 64t + 64 = 0,$$

melynek gyökei 8 és $\frac{8}{7}$.

Az első esetben, visszatérve a helyettesítéshez kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{x-1} = 8 \iff x^2 - 8x + 8 = 0 \iff x \in \{4 - 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}\}.$$

A második esetben pedig $\frac{x^2}{x-1} = \frac{8}{7}$, ahonnan a $7x^2 - 8x + 8 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek nincsenek valós gyökei.

Tehát az adott egyenlet valós megoldásai az $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$ valamint az $x_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

■

Megjegyzés. Közös nevezőre való hozással és átalakításokkal rendezve az egyenlet

$$7x^4 - 64x^3 + 128x^2 - 128x + 64 = 0.$$

Ez szorzattá alakítva $\left(x^2 - 8x + 8\right)\left(7x^2 - 8x + 8\right) = 0$ egyenlethez jutunk. Ezeken kívül a létezési feltétel 1 pontot, a megoldások tárgyalása pedig 2-2 pontot ér.

X. osztály

1. Feladat. Oldd meg a $3^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot 4^x + 10^{\frac{1}{x}} \cdot 5^x = 49 \cdot 2^{2-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Zay Éva, Zilah

Megoldás. Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x \neq 0$. Ekkor a következő alakba írható:

$$6^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} \cdot 8^x + 10^{x+\frac{1}{x}} = 196.$$

Ha $x < 0$, akkor

$$0 < 6^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} \cdot 8^x + 10^{x+\frac{1}{x}} < 1 + 1 + 1 = 3 < 196$$

Most tekintsük az $x > 0$ esetet. Vegyük észre, hogy $x = 1$ megoldás, mert $6 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 10^2 = 196$.

Továbbá

$$\left(6^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} \cdot 8^x\right) + 10^{x+\frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{6^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} \cdot 6^{\frac{1}{x}} \cdot 8^x} + 10^{x+\frac{1}{x}} =$$
$$= 2\sqrt{6^{x+\frac{1}{x}} \cdot 8^{x+\frac{1}{x}}} + 10^{x+\frac{1}{x}} \geq 2\sqrt{6^2 \cdot 8^2} + 10^2 = 196.$$

A fenti számolásokban felhasználtuk a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenségeket, illetve azt, hogy $x + \frac{1}{x} \geq 2$, minden $x > 0$ esetén, ahol egyenlőség csak $x = 1$ esetén áll fenn.

Ezek alapján $x = 1$ az egyetlen megoldása az egyenletnek. ■

2. Feladat. Adott az n nullától különböző természetes szám. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy

$$f\left(x + \frac{1}{2n+2}\right) - \frac{1}{2} \leq (n+1)x - 1 \leq f\left(x - \frac{1}{2n+2}\right) + \frac{1}{2},$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igazold, hogy $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = 0$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A bal oldali egyenlőtlenségben $x + \frac{1}{2n+2} = u$ jelölést alkalmazva azt kapjuk, hogy $f(u) \leq (n+1)u - 1$, minden $u \in \mathbb{R}$ esetén.

A jobb oldali egyenlőtlenségben $x - \frac{1}{2n+2} = v$ jelölést alkalmazva azt kapjuk, hogy $f(v) \geq (n+1)v - 1$, minden $v \in \mathbb{R}$ esetén.

Ezek alapján $f(x) = (n+1)x - 1$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. A következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{k(k+1)} - 1\right) = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} - n \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - n \\ &= (n+1)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - n = 0.\end{aligned}$$

■

3. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\log_3(x+3) = \log_5(x+5)$;

b) $(x+3)^{\log_3 5} - 2 = (x+5)^{\log_5 3}$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. a) Az egyenlet akkor értelmezett, ha $x+3 > 0$ és $x+5 > 0$, vagyis ha $x \in (-3, \infty)$.

Legyen

$$\log_3(x+3) = \log_5(x+5) = t, \tag{4}$$

ekkor $x+3 = 3^t$ és $x+5 = 5^t$. Innen $5^t - 3^t = 2$, ahonnan

$$\left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1 \tag{5}$$

Tekintsük a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + 2\left(\frac{1}{5}\right)^t$ függvényt. Mivel h szigorúan csökkenő függvények összege, ezért maga is szigorúan csökkenő, vagyis injektív is. Az (5) egyenlet alapján $h(t) = 1$. Mivel $h(1) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, vagyis $t = 1$ megoldás. Mivel h injektív, más megoldás nincs. Emiatt a (4) egyenletnek az $x = 0$ az egyetlen megoldása.

b) A megadott egyenletet

$$(x+3)^{\log_3 5} - 5 = (x+5)^{\log_5 3} - 3 \tag{6}$$

alakba írjuk. Tekintsük az $f, g\colon (-3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)^{\log_3 5} - 5$ és $g(x) = (x+5)^{\log_5 3} - 3$ függvényeket. A (6) egyenlet alapján $f(x) = g(x)$.

Vizsgáljuk a függvények monotonitását és invertálhatóságát. Mivel f szigorúan növekvő, ezért injektív is. Vizsgáljuk a szürjektivitást. A következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned}
f(x) = (x+3)^{\log_3 5} - 5 &= y \in (-5, \infty)\\
(x+3)^{\log_3 5} &= 5^{\log_3(x+3)} = y + 5\\
\log_3(x+3) &= \log_5(y+5)\\
x + 3 &= 3^{\log_5(y+5)}\\
x &= (y+5)^{\log_5 3} - 3 = g(y) \in (-3, \infty)
\end{aligned}$$

Ezek alapján f szürjektív is, tehát bijektív és $g = f^{-1}$.

A (6) alapján $f(x) = f^{-1}(x)$. Mivel f szigorúan növekvő ez csak akkor lehetséges, ha $f(x) = x$.

A következő ekvivalens állításokat írhatjuk:

$$\begin{aligned}
(x+3)^{\log_3 5} - 5 &= x\\
(x+3)^{\log_3 5} &= x + 5\\
\log_3 5 \log_3(x+3) &= \log_3(x+5)\\
\log_3(x+3) &= \frac{\log_3(x+5)}{\log_3 5} = \log_5(x+5).
\end{aligned}$$

A fenti egyenletnek az a) alpont alapján $x = 0$ az egyetlen megoldása.

■

4. Feladat. Adott a síkban az A, B, C és D pont úgy, hogy nincs közöttük három kollineáris. Jelölje H_1 illetve H_2 az ABC és az ABD háromszög magasságpontját. Igazold, hogy az A, B, C és D pontok akkor és csakis akkor vannak egy körön, ha a H_1D és a H_2C szakaszok felezőpontja egybeesik!

Zay Éva, Zilah

Megoldás. Legyen O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, melynek a komplex síkban az affixuma 0.

Jelöljük a síkban az egyes pontok affixumait a megfelelő kisbetűkkel. Legyen k az ABD háromszög köré írt kör középpontjának affixuma. A Sylvester-féle összefüggés alapján

$$h_1 = a + b + c \tag{1}$$

$$h_2 - k = (a - k) + (b - k) + (d - k) \tag{2}$$

Ha az A, B, C és D pontok egy körön helyezkednek el, akkor az ABC és az ACD háromszögek köré írt körök középpontjai egybeesnek, azaz $k = 0$, vagyis

$$k_2 = a + b + d. \tag{3}$$

Az (1) és a (3) összefüggéseket kivonva egymásból azt kapjuk, hogy $h_1 - h_2 = c - d$, ahonnan $\frac{h_1+d}{2} = \frac{h_2+c}{2}$.

Tehát a H_1D és H_2C szakaszok felezőpontja egybeesik.

Fordítva, ha a H_1D és H_2C szakaszok felezőpontjai egybeesnek, akkor $\frac{h_1+d}{2} = \frac{h_2+c}{2}$. Innen

$$h_2 = h_1 + d - c = (a + b + c) + d - c = a + b + d.$$

Másrészt a (2) összefüggés alapján $h_2 = a + b + d - 2k = h_2 - 2k$, ahonnan $k = 0$. Ez azt jelenti, hogy az ABC és az ABD háromszögek köré írt körök középpontjai egybeesnek, vagyis a négy pont egy körön helyezkedik el. ■

Megjegyzés. Az utolsó két paragrafusban megfogalmazott bizonyítás ekvivalens átalakításokkal is elvégezhető. Ebben az esetben a kétirányú bizonyítás $2 + 2 = 4$ pontra értékelendő.

XI. osztály

1. Feladat. Határozd meg az összes olyan $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre

$$X^2 + 2X = \begin{pmatrix} a+b-1 & b \\ -b & a-b-1 \end{pmatrix}, \text{ ahol } a > 0 \text{ és } \det(X + I_2) > 0.$$

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Legyen $A = X + I_2$. Ekkor $A^2 = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$, ahonnan $\det A^2 = a^2$. Felhasználjuk a Cayley–Hamilton-tételt:

$$A^2 - \operatorname{Tr} A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2.$$

Mivel $\det A^2 = (\det A)^2 = a^2$ és $\det A > 0$ kapjuk, hogy $\det A = a$. Tehát Cayley–Hamilton tételből $\operatorname{Tr} A^2 - (\operatorname{Tr} A)^2 + a \cdot \operatorname{Tr} I_2 = 0$, ahonnan $2a - (\operatorname{Tr} A)^2 + 2a = 0$, ahonnan $\operatorname{Tr} A = \pm 2\sqrt{a}$.
A fentiekből következik, hogy

$$\pm 2\sqrt{a} \cdot A = A^2 + a \cdot I_2 \iff \pm 2\sqrt{a} \cdot A = \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ -b & 2a+b \end{pmatrix}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $X_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm\frac{2a+b}{2\sqrt{a}} - 1 & \pm\frac{b}{2\sqrt{a}} \\ \mp\frac{b}{2\sqrt{a}} & \pm\frac{2a+b}{2\sqrt{a}} - 1 \end{pmatrix}$.

■

2. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat számtani haladvány, amelynek állandó különbsége e (az Euler-féle szám) és $x_1 > 0$. Értelmezzük az $(y_n)_{n\geq 1}$ és a $(z_n)_{n\geq 1}$ sorozatokat a következőképpen

$$y_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ és } z_n = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{n}$ határértéket!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n z_n}{y_{3n} - y_{2n}}$ határértéket!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. a) $\frac{y_n}{n} = \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}{n^n}} = \sqrt[n]{u_n}$.

Ekkor

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n \cdot (n+1)} = \frac{x_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x_1 + n \cdot e}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e \cdot \frac{1}{e} = 1$.

A Cauchy–d'Alembert kritérium alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{n} = 1$.

b)

$$\frac{nz_n}{y_{3n} - y_{2n}} = \frac{z_n}{\frac{y_{3n}}{n} - \frac{y_{2n}}{n}} = \frac{z_n}{3\frac{y_{3n}}{3n} - 2\frac{y_{2n}}{2n}} \tag{4}$$

Mivel az a) alapján az $\frac{y_n}{n}$ sorozat konvergens, ezert bármely részsorozata konvergens és ugyanaz a határértéke.

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1}{e}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{e}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{e} \cdot \frac{x_n - x_1}{x_1 x_n} = \frac{n-1}{(n-1)ex_1 + x_1^2} \end{aligned}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{ex_1}$. Az (1), (2) és (3) alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nz_n}{y_{3n} - y_{2n}} = \frac{\frac{1}{x_1 e}}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{1}{x_1 e}$. ■

3. Feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(n \geq 2)$ olyan invertálható mátrixok, amelyekre az $A + B$ mátrix is invertálható és $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Igazold, hogy $|\det(A+B)| = |\det A| = |\det B|$.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Mivel $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$, következik, hogy $(A+B)(A^{-1} + B^{-1}) = I_n$.

Innen

$$\begin{aligned} AA^{-1} + AB^{-1} + BA^{-1} + BB^{-1} &= I_n \\ I_n + AB^{-1} + BA^{-1} + I_n &= I_n \\ AB^{-1} + BA^{-1} &= -I_n \end{aligned} \tag{1}$$

Az (1) összefüggést jobbról beszorozva A-val kapjuk, hogy

$AB^{-1}A + B = -A,$ ahonnan

$$A + B = -AB^{-1}A \Longrightarrow \det(A+B) = (-1)^n \frac{(\det A)^2}{\det B} \tag{2}$$

Az (1) összefüggést balról beszorozva B^{-1}-gyel kapjuk, hogy

$B^{-1}AB^{-1} + A^{-1} = -B^{-1},$ ahonnan

$$A^{-1} + B^{-1} = -B^{-1}AB^{-1} \Longrightarrow \det(A^{-1}+B^{-1}) = (-1)^n \frac{\det A}{(\det B)^2} \tag{3}$$

$$\det(A+B) = \frac{1}{\det(A+B)^{-1}} = \frac{1}{\det(A^{-1}+B^{-1})} \tag{4}$$

A (2), (3), (4) alapján kapjuk, hogy

$$(-1)^n \frac{(\det A)^2}{\det B} = (-1)^n \frac{(\det B)^2}{\det A} \Longrightarrow (\det A)^3 = (\det B)^3$$
$$\Longrightarrow |\det A| = |\det B|$$

A fenti összefüggésből és a (2) alapján következik, hogy

$$|\det(A+B)| = \left|(-1)^n \frac{(\det A)^2}{\det B}\right| = \frac{|\det A|^2}{|\det B|} = |\det A|,$$

ahonnan $|\det(A+B)| = |\det A|$.

■

Második megoldás. Teljesül, hogy

$$(A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A+B) = I_n$$
$$(A+B)(A^{-1}+B^{-1}) = (A^{-1}+B^{-1})(A+B) = I_n.$$

Az előbbiek alapján meg kell határozzuk az A és B invertálható mátrixokat, amelyekre

$$AB^{-1} + BA^{-1} = -I_n = A^{-1}B + B^{-1}A.$$

Legyen $C = AB^{-1}$, ekkor $C^{-1} = (AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$. Azt kapjuk, hogy $C + C^{-1} = I_n$, ahonnan $C^2 + C + I_n = O_n$, innen pedig $C^3 = I_n$. Ezek alapján $\det^3 C = 1$, vagyis $\det C \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon^3 = 1$. Innen

$$1 = |\det C| = |\det(AB^{-1})| = \left|\frac{\det A}{\det B}\right|,$$

ahonnan $|\det A| = |\det B|$. Mivel $C + I_n = -C^2$, így

$$|\det(C + I_n)| = |\det(-C^2)| = |(-1)^n \det(C^2)| = 1.$$

Az is teljesül, hogy $C + I_n = AB^{-1} + I_n = (A + B)B^{-1}$, így

$$1 = |\det(C + I_n)| = |\det(A + B)\det(b^{-1})| = \left|\frac{\det(A + B)}{\det(B)}\right|,$$

innen pedig $|\det(A + B)| = |\det B|$.

■

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük: $x_1 = 1$ és

$$(x_{n+1} - 1)(x_n + 1) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Számítsd ki a sorozat határértékét!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. Felírjuk a sorozat első néhány tagját:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1\frac{1}{2}, \quad x_3 = 1\frac{2}{5}, \quad x_4 = 1\frac{5}{12}, \quad x_5 = 1\frac{12}{19}, \quad x_6 = 1\frac{29}{70}.$$

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Észrevesszük, hogy $x_{2n-1} < \sqrt{2}$ és $x_{2n} > \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ezt matematikai indukcióval igazolhatjuk. Feltételezzük, hogy $x_{2k-1} < \sqrt{2}$ és $x_{2k} > \sqrt{2}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Következtetünk arra, hogy $x_{2k+1} < \sqrt{2}$ és $x_{2k+2} > \sqrt{2}$.

Mivel $(x_{n+1} - 1)(x_n + 1) = 1$, következik, hogy $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, így

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{1 + x_{2k}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x_{2k-1}}} \\ &= 1 + \frac{1 + x_{2k-1}}{3 + 2x_{2k-1}} = \frac{4 + 3x_{2k-1}}{3 + 2x_{2k-1}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} x_{2k+1} < \sqrt{2} &\iff \frac{4+3x_{2k-1}}{3+2x_{2k-1}} < \sqrt{2} \\ &\iff 4+3x_{2k-1} < 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}x_{2k-1} \\ &\iff (3-2\sqrt{2})x_{2k-1} < 3\sqrt{2}-4 \\ &\iff x_{2k-1} < \frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}} \\ &\iff x_{2k-1} < \sqrt{2}, \end{aligned}$$

ami igaz. Hasonlóan igazolható, hogy $x_{2k+2} > \sqrt{2}$. Mivel

$$x_{n+2} = 1 + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+x_n}} = 1 + \frac{1+x_n}{3+2x_n} = \frac{4+3x_n}{3+2x_n},$$

következik, hogy

$$x_{n+2} - x_n = \frac{4+3x_n}{3+2x_n} - x_n = -\frac{2(x_n^2-2)}{2x_n+3} = -\frac{2(x_n-\sqrt{2})(x_n+\sqrt{2})}{2x_n+3}.$$

De $x_n+\sqrt{2} > 0, 2x_n+3 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ha n páros, akkor $x_n-\sqrt{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ahonnan $x_{n+2}-x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Valamint, ha n páratlan, akkor $x_n - \sqrt{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, vagyis $x_{n+2}-x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tehát azt kaptuk, hogy a páros indexű tagok részsorozata szigorúan csökkenő és $\sqrt{2}$-nél nagyobb. Így $(x_{2n})_{n\geq 1}$ konvergens és $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l_1 \in \mathbb{R}$.

Ugyanakkor a páratlan indexű tagok részsorozata szigorúan növekvő és $\sqrt{2}$-nél kisebb, így $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ konvergens és $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_2 \in \mathbb{R}$.

A megadott feltételből $x_{2n+2} = \frac{3x_{2n}+4}{2x_{2n}+3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Határértékre térve az összefüggésben kapjuk, hogy $l_1 = \frac{3l_1+4}{2l_1+3}$, ahonnan $l_1^2 = 2$, de $l_1 > 0$, így $l_1 = \sqrt{2}$.

Hasonlóan az $x_{2n+1} = \frac{3x_{2n-1}+4}{2x_{2n-1}+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ összefüggésben határértékre térve kapjuk, hogy $l_2 = \sqrt{2}$.

Mivel $(x_{2n})_{n\geq 1}$ és $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ részsorozatok konvergensek és mindkettő határértéke $\sqrt{2}$, így az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens és a határértéke $\sqrt{2}$.

■

Második megoldás. A rekurziót $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$ alakra hozzuk. Innen

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{1+x_n} - (\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{2}-x_n}{(1+x_n)(1+\sqrt{2})},$$

tehát

$$\left|\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{(1+x_n)(1+\sqrt{2})}.$$

Mivel $x_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, azt kapjuk hogy

$$\frac{1}{(1+x_n)(1+\sqrt{2})} < \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Legyen $y_n = x_n - \sqrt{2}$. Ekkor $\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| < \frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Ez alapján

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| < \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}.$$

Innen következik, hogy $\left|\frac{y_n}{y_1}\right| < \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}$, ezért

$$|y_n| < |y_1|\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})^{n-1}}.$$

Azt kaptuk, hogy $0 \le |y_n| \le \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n$, így

$$0 \le \lim_{n\to\infty}|y_n| \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n = 0.$$

Innen $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{2}| = 0$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. ∎

XII. osztály

1. Feladat. Mutasd ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik három különböző A, B, C pont az $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ függvény grafikus képén úgy, hogy $T_{ABC_\Delta} = n^4$.

dr. Bencze Mihály, Brassó
dr. Lukács Andor, Kolozsvár

Megoldás. Tekintsük a f grafikonján az $A(0,0)$, $B(1,1)$ rögzített pontokat és a $C_x(x, x^5)$ változó pontot minden $x \geq 1$ esetén. Ekkor

$$T_{ABC_\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x^5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x^5 - x).$$

Legyen $g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(x^5 - x)$. Mivel g folytonos, ezért Darboux-tulajdonságú, valamint $g(1) = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, ezért minden $y \in [0,\infty)$ esetén létezik olyan $x \in [1,\infty)$ amelyre $T_{ABC_\Delta} = g(x) = y$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $n^4 \in [0,\infty)$, ezért választható olyan $x \geq 1$, amelyre $T_{ABC_\Delta} = n^4$. ∎

2. Feladat. Számítsd ki az

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{(x + a\sin x)(x + b\sin x)}\,\mathrm{d}x$$

integrált a következő esetekben:
1) ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq b$;
2) ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a = b$,
ahol x olyan értékeket vehet fel, melyekre értelmezett az integrálban lévő kifejezés.

dr. Bencze Mihály, Brassó
Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. 1)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x\cos x - \sin x}{(x + a\sin x)(x + b\sin x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a-b}\int \left(\frac{a\cos x + 1}{a\sin x + x} - \frac{b\cos x + 1}{b\sin x + x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a-b}\big(\ln|a\sin x + x| - \ln|b\sin x + x|\big) + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{a\sin x + x}{b\sin x + x}\right| + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

2) Ha $a \neq 0$, akkor

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{(x + a\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{-x}{x + a\sin x} + \mathcal{C}.$$

Ha $a = 0$, akkor

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x} + \mathcal{C}.$$

■

3. Feladat. A $G = (0, \infty)$ halmazon értelmezett „$\circ$” művelet teljesíti az $a^x + a^{x\circ y} + a^y = 2 + a^{x+y}$ összefüggést bármely $x, y \in G$ esetén, ahol $a > 1$.
a) Igazold, hogy $(G, \circ)$ Abel-csoport!
b) Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_k \in G$ minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, akkor mutasd ki, hogy

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a^{x_i\circ x_j} - 1} \le \frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^{n} a^{x_k}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A megadott összefüggés alapján $x\circ y = \log_a\big(1+(a^x-1)(a^y-1)\big) > 0$ minden $x, y \in G$ esetén, ahol az előbbi egyenlőség jobb oldala értelmezett ($a > 1$ és $x, y > 0$), tehát „$\circ$” belső művelet.
A művelet asszociatív, mert minden $x, y, z \in G$ esetén

$$(x\circ y)\circ z = \log_a\big(1 + (a^x - 1)(a^y - 1)(a^z - 1)\big) = x\circ(y\circ z).$$

A művelet kommutatív, mert minden $x, y \in G$ esetén

$$x \circ y = \log_a \big(1 + (a^x - 1)(a^y - 1)\big).$$

Az $x \circ u = x$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $x \in G$ esetén, ha

$$\log_a \big(1 + (a^x - 1)(a^u - 1)\big) = x, \quad \forall x \in G,$$

ami ekvivalens az

$$(a^x - 1)(a^u - 2) = 0, \quad \forall x \in G$$

egyenlettel. Tehát $u = \log_a 2 \in G$ a semleges elem. Minden $x \in G$ invertálható a „$\circ$” műveletre nézve, mivel az $x \circ x' = \log_a 2$ egyenlet ekvivalens módon átalakítható az $a^{x'} = 1 + \frac{1}{a^x - 1}$ egyenletté, tehát

$$x' = \log_a \left(1 + \frac{1}{a^x - 1}\right) \in G$$

a tetszőleges $x \in G$ inverze. b) A számtani és mértani középértékek közötti egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$a^{x_i \circ x_j} - 1 = (a^{x_i} - 1)(a^{x_j} - 1) \le \left(\frac{a^{x_i} - 1 + a^{x_j} - 1}{2}\right)^2,$$

tehát $2\sqrt{a^{x_i \circ x_j} - 1} \le a^{x_i} + a^{x_j} - 2$. Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le n} \sqrt{a^{x_i \circ x_j} - 1} \quad &\le \sum_{1 \le i < j \le n} (a^{x_i} + a^{x_j} - 2) \\ =&(n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{x_k} - 2 \cdot C_n^2, \end{aligned}$$

ezért

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{1 \le i < j \le n} \sqrt{a^{x_i \circ x_j} - 1} \le \frac{n-1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} a^{x_k}.$$

■

4. Feladat. Jelölje rendre $F, G\colon E \to \mathbb{R}$ az $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ függvények egy-egy primitívjét. Határozd meg az f és g függvényeket a következő esetekben:
a) $E = (0, \infty)$, illetve minden $x \in E$ esetén

$$\begin{cases} xf(x) + G(x) &= x, \\ xg(x) + F(x) &= -x. \end{cases}$$

b) $E = \mathbb{R}$, illetve minden $x \in E$ esetén

$$\begin{cases} f(x) + G(x) &= x, \\ g(x) + F(x) &= -x. \end{cases}$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. a) Összeadva a megadott rendszer két egyenletét, írhatjuk, hogy

$$\big(x(F(x) + G(x))\big)' = 0, \quad \forall x \in E,$$

tehát létezik $c_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \cdot (F(x) + G(x)) = c_1$, vagyis

$$G(x) = \frac{c_1}{x} - F(x).$$

A megadott rendszer első egyenlete alapján innen következik, hogy

$$x \cdot f(x) + \frac{c_1}{x} - F(x) = x.$$

Elosztva ezt az egyenletet x^2-tel, előbb az

$$\frac{1}{x} \cdot f(x) - \frac{1}{x^2} \cdot F(x) = \frac{1}{x} - \frac{c_1}{x^3},$$

majd pedig az

$$\left(\frac{1}{x}F(x)\right)' = \left(\ln x + \frac{c_1}{2x^2}\right)'$$

összefüggéshez jutunk. Tehát létezik $c_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\frac{1}{x} \cdot F(x) = \ln x + \frac{c_1}{2x^2} + c_2$. Ez alapján

$$F(x) = x \cdot \ln x + \frac{c_1}{2x} + c_2 x.$$

Innen következik, hogy

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{c_1}{2x^2} + c_2,$$
$$g(x) = -\ln x - \frac{c_1}{2x^2} - c_2 - 1.$$

b) Összeadva a megadott összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$(F(x) + G(x))' + F(x) + G(x) = 0.$$

Ez az egyenlet ekvivalens az

$$(F(x) + G(x))' \cdot e^x + (F(x) + G(x)) \cdot (e^x)' = 0$$

egyenlettel, ezért $(e^x(F(x) + G(x))' = 0$, tehát létezik $c_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $e^x(F(x) + G(x)) = c_1$, és innen következik, hogy $G(x) = c_1 e^{-x} - F(x)$, ami a megadott rendszer alapján az $f(x) - F(x) = x - c_1 \cdot e^{-x}$ egyenlőséghez vezet. Beszorozva ezt az összefüggést e^{-x}-nel, következik, hogy

$$(e^{-x} F(x))' = \left(-(x+1) \cdot e^{-x} + \frac{c_1}{2} \cdot e^{-2x}\right)',$$

tehát létezik $c_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$e^{-x} F(x) = -(x+1)e^{-x} + \frac{c_1}{2} \cdot e^{-2x} + c_2.$$

Ha elosztjuk az egyenletet e^{-x}-nel, akkor az újabb egyenletet deriválva előbb megkapjuk a keresett f függvényt, majd pedig a rendszer felhasználásával a g függvényt is:

$$f(x) = -1 - \frac{c_1}{2} \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x,$$
$$g(x) = 1 - \frac{c_1}{2} \cdot e^{-x} - c_2 \cdot e^x.$$

■

Megoldások - II. forduló

IX. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $17^{2^n} + 17^{2^{n-1}} + 1$ osztható 307-tel!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Indukcióval igazoljuk az állítást. Ha $n = 1$, akkor $17^2 + 17 + 1 = 307$, tehát az állítás igaz.
Feltételezzük, hogy igaz $k \in \mathbb{N}^*$-ra az állítás, vagyis $307 \mid 17^{2^k} + 17^{2^{k-1}} + 1$. Mivel

$$17^{2^{k+1}} + 17^{2^k} + 1 = (17^{2^k} + 17^{2^{k-1}} + 1)(17^{2^k} - 17^{2^{k-1}} + 1),$$

ezért $307 \mid 17^{2^{k+1}} + 17^{2^k} + 1$. A matematikai indukció elve alapján tehát $17^{2^n} + 17^{2^{n-1}} + 1$ osztható 307-tel minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

■

2. Feladat. a) Oldd meg a nemnegatív valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x+y+z+1)(x+y+z+2) = 2 + (x+\sqrt{y})^2 + (y+\sqrt{z})^2 + (z+\sqrt{x})^2.$$

b) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - xy + 45y = 2019.$$

Longáver Lajos, Nagybánya
Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. a) Az egyenleten a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned}
&x^2 + xy + xz + 2x + xy + y^2 + zy + 2y \\
&\quad + xz + yz + z^2 + 2z + x + y + z + 2 = \\
&= 2 + x^2 + 2x\sqrt{y} + y + y^2 + 2y\sqrt{z} + z + z^2 + 2z\sqrt{x} + x \iff \\
&2xy + 2yz + 2zx - 2x\sqrt{y} - 2y\sqrt{z} - 2z\sqrt{x} + 2x + 2y + 2z = 0 \iff \\
&xy - x\sqrt{y} + x + yz - y\sqrt{z} + y + zx - z\sqrt{x} + z = 0 \iff \\
&x(y - \sqrt{y} + 1) + y(z - \sqrt{z} + 1) + z(x - \sqrt{x} + 1) = 0
\end{aligned}$$

Mivel az $x-\sqrt{x}+1$, $y-\sqrt{y}+1$ és $z-\sqrt{z}+1$ kifejezések szigorúan pozitívak ha $x,y,z\geq 0$, az egyetlen megoldás $x=y=z=0$. Összegezve, $M=\{(0,0,0)\}$.

b) Az egyenletet a következő alakba írjuk:

$$y(45-x)=2019-x^2.$$

Ha $45-x=0 \Longrightarrow 2019-x^2=0 \Longrightarrow x=\in\{-\sqrt{2019},\sqrt{2019}\}$, ellentmondás $x\in\mathbb{Z}$-vel. Ekkor

$$y=\frac{2019-x^2}{45-x}=\frac{2025-x^2}{45-x}-\frac{6}{45-x}=45+x-\frac{6}{45-x}\in\mathbb{Z}.$$

Azt kaptuk, hogy $45-x\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$.

A lehetséges megoldásokat az alábbi táblázatba foglaltuk:

x	39	42	43	44	46	47	48	51
y	83	85	85	83	97	95	95	97

$$\begin{aligned}M=&\{(39,83),(42,85),(43,85),(44,83),(46,97),(47,95),\\&(48,95),(51,97)\}\end{aligned}$$

.

■

3. Feladat. Ha $a_1=0$ és $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=4a_n$, valamint $a_{n+1}\geq a_n+1$, $\forall n\geq 1$, akkor igazold, hogy

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{n-1}{n}.$$

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}$ kifejezés értelmezett, mivel az $a_1=0$ és $a_{n+1}\geq a_n+1$ összefüggésekből következik, hogy $a_n\geq 0$, $\forall n\geq 2$.

$n=1$-re: $(a_2-a_1)(a_2-a_1-2)=4a_1 \iff a_2(a_2-2)=0\Longrightarrow a_2=2$.

$n=2$-re: $(a_3-a_2)(a_3-a_2-2)=4a_2 \iff a_3^2-6a_3=0 \Longrightarrow a_3=6$.
Tehát $a_1=0=0\cdot 1$, $a_2=2=1\cdot 2$, $a_3=6=2\cdot 3$.
Sejtés $a_n=(n-1)n, \forall n\geq 1$.
Bizonyítás matematikai indukcióval:
$n=1$-re $a_1=0\cdot 1=0$ igaz. Feltételezzük, hogy $a_k=(k-1)k, k\geq 1$ és igazoljuk, hogy $a_{k+1}=k(k+1)$. Kiindulva a feladatban megadott összefüggésből, észrevesszük, hogy

$$(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}-a_k-2)=4a_k \iff (a_{k+1}-a_k-1)^2=4a_k+1.$$

Mivel $a_{k+1}\geq a_k+1$, ezért

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=a_k+\sqrt{4a_k+1}+1=(k-1)k+\sqrt{4(k-1)k+1}+1\\ &=k^2-k+(2k-1)+1=k^2+k=k(k+1) \end{aligned}$$

Tehát $a_n=n(n-1)$, $\forall n\geq 1$. Ekkor

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}, \quad \text{így}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\ &=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

■

4. Feladat. Jelölje AD, BE és CF az ABC háromszög belső szögfelezőit, ahol $D\in(BC)$, $E\in(CA)$ és $F\in(AB)$. Ha az ABD, BCE és CAF háromszögek területeinek egyike a másik kettő számtani középarányosa, akkor igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás.
Vezessük be az $AB=c$, $AC=b$ és $BC=a$ jelöléseket.

Az AD szögfelezőre vonatkozó tétel, valamint az aránypárok származtatási tulajdonságai miatt az

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{DB}\iff\frac{b}{c}=\frac{CD}{DB}\iff\frac{b+c}{c}=\frac{CD+DB}{DB}=\frac{CB}{DB}=\frac{a}{DB}$$

összefüggést kapjuk, ahonnan következik, hogy

$$DB = \frac{a \cdot c}{b + c}. \tag{5}$$

Bevezetve a $h = d\,(A, BD)$ jelölést is, a

$$T_{ABD_\Delta} = \frac{BD \cdot h}{2} \tag{6}$$

összefüggéshez jutunk. Az (5)-ös és (6)-os egyenlőségek alapján végül a

$$T_{ABD_\Delta} = \frac{a \cdot c \cdot h}{2\,(b+c)} = \frac{c}{b+c} \cdot \frac{a \cdot h}{2} = \frac{c}{b+c} \cdot T_{ABC_\Delta} \tag{7}$$

összefüggést kapjuk. Hasonlóan, a

$$T_{BCE_\Delta} = \frac{a}{a+c} \cdot T_{ABC_\Delta} \quad \text{és} \quad T_{CAF_\Delta} = \frac{b}{a+b} \cdot T_{ABC_\Delta}$$

egyenlőségeket is levezethetjük. Azt feltételezve, hogy T_{ABD_Δ} a másik két terület számtani középarányosa, a

$$\begin{aligned} \frac{c}{b+c} \cdot T_{ABC_\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} \right) \cdot T_{ABC_\Delta} && \Longleftrightarrow \\ \frac{2c}{b+c} &= \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} && \Longleftrightarrow \\ 0 &= (c-b)\left(a^2 + 2ac + 2ab + bc.\right) \end{aligned}$$

ekvivalens átalakításokat végezhetjük el.

Az utolsó egyenlőtlenségből a $b = c$ egyenlőséget kapjuk, vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú. Analóg módon igazolható az állítás, ha a BCE (vagy a CAF) háromszög területe egyezik meg a másik két háromszög területének a számtani közepével.

■

5. Feladat. Adott az $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$ halmaz. Legfeljebb hány eleme lehet az A egy olyan részhalmazának, amelyben bármely két elem összege nem osztható 25-tel?

Spier Tünde, Arad
Vass Ferenc, Szováta

Megoldás. Az A halmaz elemeit az $A_0, A_1, \ldots, A_{24}$ részhalmazokra skatulyázzuk, ahol

$$A_p = \{25k + p \mid 0 \leq p < 25\}.$$

Mivel $2019 = 25 \cdot 80 + 19$, ezért

$$\begin{aligned} \operatorname{card} A_0 &= 80, \\ \operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2 = \ldots = \operatorname{card} A_{19} &= 81, \\ \operatorname{card} A_{20} = \operatorname{card} A_{21} = \ldots = \operatorname{card} A_{24} &= 80. \end{aligned}$$

Ha $a, b \in A$ két olyan kiválasztott elem, amelyre $25 \mid (a + b)$, akkor $a \in A_k$, $b \in A_{25-k}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 24\}$, vagy $a, b \in A_0$.

Ahhoz, hogy $25 \nmid (a + b)$, kiválasztjuk az összes elemet az A_1, A_2, $\ldots$, A_{12} halmazokból és 1 elemet az A_0-ból. Ezeknek az elemeknek a száma $12 \cdot 81 + 1 = 973$.

Az előző kiválasztás másképp is megvalósítható: az $A_1, A_2, \ldots, A_{19}$ halmazokból tetszőlegesen kiválasztunk 12 halmazt úgy, hogy bármelyik két halmaz indexének az összege ne legyen 25.

Tehát a legtöbb elemet tartalmazó részhalmaznak legfeljebb 973 eleme van. A fenti szerkesztés segítségével a skatulyaelv alapján könnyen belátható, hogy 974, vagy annál több elemű részhalmazok esetén már lesz két olyan elem a részhalmazban, amelyek összege osztható 25-tel.

■

6. Feladat. Határozd meg a

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2} = 2\sqrt{2019}$$

egyenlet összes megoldását, tudva azt, hogy $a < b < c$ prímszámok!

dr. Bencze Mihály, Brassó
Oláh-Ilkei Árpád, Barót

Megoldás. Az adott összefüggést átalakítva kapjuk, hogy

$$\sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2)} = 2\sqrt{2019} \iff a^2 + b^2 + c^2 = 2019.$$

Mivel $a < b < c$, így $a^2 < b^2 < c^2$, vagyis $a \leq 25$ és $c \geq 26$. (1)

Ha $a = 2$, akkor $a^2 + b^2 + c^2$ páros és 2019 páratlan, ami ellentmondás. Vagyis $a \neq 2$.

Ha $a = 3$, akkor $b^2 + c^2 = 2010$. De $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 3$, így $(b^2 + c^2) \equiv 2 \pmod 3$ és $2010 \equiv 0 \pmod 3$. Ez ellentmondás, vagyis $a \neq 3$.

Ha $a = 5$, akkor $b^2 + c^2 = 1994$. De ha x egy 5-nél nagyobb prímszám, akkor az x^2 utolsó számjegye 1 vagy 9, ahonnan azt kapjuk, hogy a $b^2 + c^2$ utolsó számjegye nem lehet 4. Vagyis $a \neq 5$.

Ha $a \geq 7$, akkor $b \geq 11$, ekkor $c^2 = 2019 - (a^2 + b^2)$, vagyis $c \leq 43$. Így az (1)-es alapján $c \in \{29, 31, 37, 41, 43\}$.

A $c = 29$ és $c = 31$ esetben nincs megoldás.

Ha $c = 37$, akkor $a = 11, b = 23$, vagy $a = 17, b = 19$.

Ha $c = 41$, akkor az $a = 7, b = 17$ prímek teljesítik a megadott feltételt.

Ha $c = 43$, akkor $a = 7, b = 11$.

$\blacksquare$

X. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy

$$\left[\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}\right]=n+2,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

ahol az $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Brassó

Első megoldás. A megadott összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha

$$n+2\leq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<n+3 \iff$$
$$n(n+2)\leq 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<n(n+3) \iff$$
$$n(n+1)+n\leq 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<n(n+1)+2n.$$

A fenti két egyenlőtlenség a matematikai indukció módszerével igazolható. ■

Második megoldás. Először igazoljuk, hogy

$$n+\frac{1}{2}<\sqrt{n(n+1)+\frac{1}{2}}<n+1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{8}$$

Valóban, $n^2+n+\frac{1}{4}<n^2+n+\frac{1}{2}<n^2+2n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Az (1)-es összefüggés alapján

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<\sum_{k=1}^{n}(k+1) \iff$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<\frac{n(n+1)}{2}+n \iff$$
$$n(n+1)+n<2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}<n(n+1)+2n \iff$$

$$n(n+2) < 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}} < n(n+3) \iff$$
$$n+2 < \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}} < n+3,$$

bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahonnan

$$\left[\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)+\frac{1}{2}}\right] = n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

■

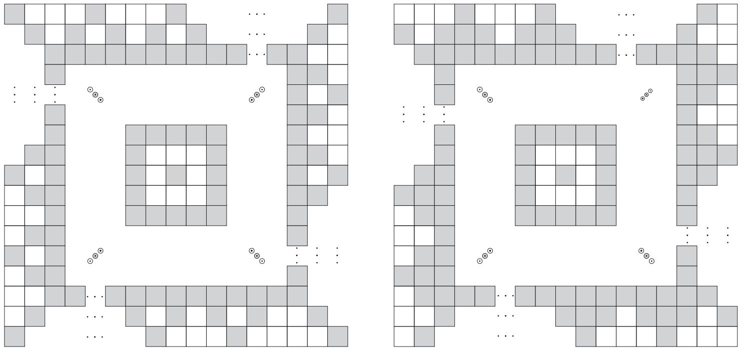
2. Feladat. Janka és Veronka tervet készít egy négyzet alakú terasz burkolására, amelyhez fehér és szürke, 5 cm oldalhosszú, négyzet alakú mozaiklapokat akarnak használni. Előbb kijelölik a terasz középpontját egy szürke mozaiklappal, ezt 8 fehér mozaiklappal szegélyezik, így egy nagyobb fehér négyzet közepén van egy szürke négyzet. Ilyen módon folytatják a szegélyezést, váltva a színeket, míg a középpontban lévő mozaiklapot 100 fehér és 100 szürke mozaiklap sorral rakják körül, egyre nagyobb koncentrikus négyzeteket alakítva ki. Ezután még két szegélyező sor lerakására van lehetőségük és elhatározzák, hogy érdekesebb mintával rakják körül a teraszt. Előbb egy szürke és egy fehér mozaiklap váltakozásával szegélyeznek, majd az utolsó szegélyezést egy szürke és három fehér lap váltakozásával alakítják ki.

a) Legalább hány szürke, illetve fehér mozaiklapra van szükségük, hogy a terv szerint be tudják fejezni a burkolást?

b) Milyen színű mozaiklapból kellene több, ha az utolsó előtti szegélyezést egy fehér és három szürke lap váltakozásával akarnák kialakítani?

Zay Éva, Zilah

Megoldás. A mozaiklapok lerakását a két alpont esetében a mellékelt ábrán szemléltetjük.



(a) (b)

a) Jelölje a_k a k. szegélyben lerakott mozaiklapok számát, ekkor $a_1 = 8$, $a_2 = 16$, $a_3 = 24$, $a_4 = 32$. Indukcióval igazolható, hogy $a_n = 8n$.

Jelölje s_k a k. szürke szegélyben lerakott mozaiklapok számát, ahol $s_k = a_{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Legyen f_k a k. fehér szegélyben lerakott mozaiklapok száma, ahol $f_k = a_{2k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

A fentiek alapján $f_{100} = 8(2 \cdot 100 - 1) = 1592$ és $s_{100} = 8(2 \cdot 100) = 1600$.

A 100 fehér szegély lerakásakor felhasznált mozaiklapok száma:

$$S_{100}(f) = \frac{100}{2}(f_1 + f_{100}) = 50(8 + 1592) = 80000.$$

A 100 szürke szegély lerakásakor felhasznált mozaiklapok száma:

$$S_{100}(s) = \frac{100}{2}(s_1 + s_{100}) = 50(16 + 1600) = 80800.$$

Az utolsó előtti szegélyezésben összesen $8 \cdot 201 = 1608$ mozaiklapot használnak fel, amelyből 804 fehér és 804 szürke.

Az utolsó szegélyezésben összesen $8 \cdot 202 = 1616$ mozaiklapot használnak fel, ebből 404 szürke és 1212 fehér.

A fehér mozaiklapok száma összesen: $80000 + 804 + 1212 = 82016$.

A szürke mozaiklapok száma összesen: $80800 + 804 + 404 + 1 = 82009$. Az utolsó összefüggésben az eddig nem számolt középső szürke mozaiklap adja a plusz egyet.

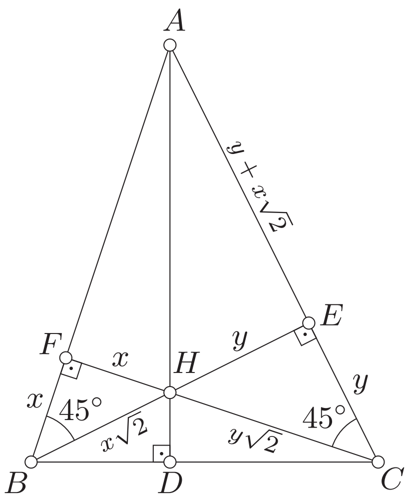
b) Ebben az esetben az utolsó előtti szegélyben lerakott 1608 mozaiklapból 402 fehér és 1206 szürke. Így összesen $80000 + 402 + 1212 = 81614$ fehér, illetve $80800 + 1206 + 404 + 1 = 82411$ szürke mozaiklapra lenne szükség. Tehát a szürkéből kellene több.

■

3. Feladat. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A szög mértéke $45°$. Az AD magasság a BC oldalt $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ arányban osztja. Igazold, hogy a H magasságpont a BE magasság felezőpontja!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük az alábbi ábrát.



Jelölje F a C-ből húzott magasság talppontját. Mivel az A szög $45°$-os ezért az AEB és AFC derékszögű háromszögekben a B illetve a C szög mértéke is $45°$. Az előbbiekből következik, hogy a BFH és a CEH derékszögű háromszögek egyenlő szárúak.

Legyen $BF = FH = x$, valamint $CE = EH = y$. Következik, hogy

$$BH = x\sqrt{2}, CH = y\sqrt{2}, AE = BE = y + x\sqrt{2}, AF = FC = x + y\sqrt{2}.$$

A BEC háromszögre és az AD szelőre alkalmazzuk Menelaosz tételét: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{HE}{HB} = 1$.

Ahonnan $\frac{2}{3} \cdot \frac{2y+x\sqrt{2}}{y+x\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{x\sqrt{2}} = 1$, amelyet átalakítva a $4y^2 - \sqrt{2}xy - 6x^2 = 0$ összefüggéshez jutunk.

Elosztva az egyenlőséget x^2-tel, és az $\frac{y}{x} = t$ jelölést alkalmazva, a $4t^2 - \sqrt{2}t - 6 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek az egyetlen pozitív megoldása a $t = \sqrt{2}$. Innen kapjuk, hogy $y = x\sqrt{2}$ vagyis, hogy $HE = BH$. ■

4. Feladat. Igazold, hogy egyetlen olyan n és egyetlen olyan k természetes szám létezik, amelyre

$$2^{17} + 17 \cdot 2^{12} + 2^n = k^2.$$

Zay Éva, Zilah

Megoldás. Ha létezik $k \in \mathbb{N}$, amelyre teljesül a követelmény, akkor

$$2^{17} + 17 \cdot 2^{12} + 2^n = k^2 \iff 2^n = k^2 - 17 \cdot 2^{12} - 2^{17} \iff$$
$$\iff 2^n = k^2 - 2^{12}(17 + 2^5) \iff 2^n = k^2 - 2^{12} \cdot 49 \iff$$
$$\iff 2^n = (k - 2^6 \cdot 7)(k + 2^6 \cdot 7).$$

Mivel az utolsó egyenlőség bal oldala 2-nek hatványa, az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a jobb oldalon lévő szorzat is 2-nek hatványa.

Legyen $p, q \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $p + q = n$, $p < q$ és

$$\begin{cases} 2^p = k - 2^6 \cdot 7 \\ 2^q = k + 2^6 \cdot 7 \end{cases}, \quad \text{ahonnan} \quad \begin{cases} k = 2^p + 7 \cdot 2^6 \\ k = 2^q - 7 \cdot 2^6 \end{cases}.$$

Ekkor

$$2^p + 7 \cdot 2^6 = 2^q - 7 \cdot 2^6 \quad \iff \quad 2 \cdot 7 \cdot 2^6 = 2^q - 2^p = 2^p(2^{q-p} - 1).$$

Mivel $2^{q-p} - 1$ páratlan, ez csak úgy lehetséges, ha

$$\begin{cases} 2^{q-p} - 1 = 7 \\ 2^p = 2^7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{q-p} = 2^3 \\ p = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 7 \\ q = 10 \end{cases},$$

ahonnan $n = 17$ és $k = 2^{10} - 7 \cdot 2^6 = 9 \cdot 2^6 = 576$. Azt kaptuk, hogy $n = 17$ és $k = 576$ az egyedüli természetes számok, amelyekre teljesül a követelmény.

■

5. Feladat. Az $1, 2, 3, \ldots, 2019$ számok közül véletlenszerűen kiválasztunk 1347 számot. Igazold, hogy a kiválasztott számok között van három olyan, amelyek közül az egyik a másik kettőnek a számtani közepe!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. Legyen M a kiválasztott számok halmaza, $\operatorname{card} M = 1347$. A kiválasztott számok között van legalább 674 azonos paritású, ellenkező esetben legfeljebb 673 páros és 673 páratlan lenne, így összesen $2 \cdot 673 = 1346 < 1347$ szám lenne.

Legyenek $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{674} \leq 2019$ az azonos paritású kiválasztott számok és

$$A = \{a_k | 1 \leq k \leq 674\}, \quad \operatorname{card} A = 674.$$

Képezzük a $b_1 = \frac{a_1+a_2}{2}, b_2 = \frac{a_1+a_3}{2}, \ldots, b_{673} = \frac{a_1+a_{674}}{2}$ számokat. Legyen $B = \{b_k | 1 \leq k \leq 673\}$. Mivel $b_1 < b_2 < \cdots < b_{673}$, és A elemei azonos paritásúak, ezért B elemei természetes számok, tehát

$$B \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}, \text{ és } \operatorname{card} B = 673.$$

Ha $M \cap B = \emptyset$, akkor $\operatorname{card}(M \cup B) = \operatorname{card} M + \operatorname{card} B = 1347 + 673 = 2020 > 2019$, ami ellentmondás.

Vagyis $M \cap B \neq \emptyset$, így az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_1+a_{674}}{2}$ számok között van legalább egy, amely megegyezik a kiválasztott 1347 szám valamelyikével. Tehát van három olyan természetes szám az 1347 között, hogy az egyik szám a másik kettő számtani közepe.

■

6. Feladat. Az ABC egyenlő szárú, hegyesszögű háromszög A szögének mértéke $20°$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt D-ben, az ABD szög szögfelezője pedig E-ben metszi. Az E középpontú, ED sugarú körnek az AB oldallal való, A-hoz közelebbi metszéspontja F.

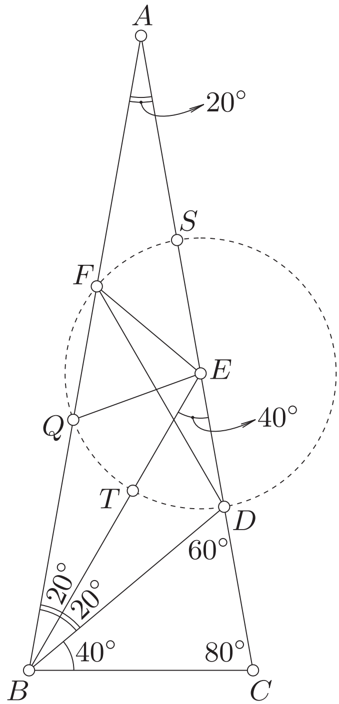
a) Igazold, hogy az $FEDB$ négyszög körbeírható!

b) Ha $AF = a$ és $ED = b$, számítsd ki a és b függvényében az AE, FB és DC szakaszok hosszát!

c) Igazold, hogy $\frac{a}{b} = 2\cos 20°$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Koczinger Éva, Szatmárnémeti
Zay Éva, Zilah

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a mellékelt ábrát.



Jelölje $\mathcal{K}$ az E középpontú ED sugarú kört.

a) Legyen $\{T\} = BE \cap \mathcal{K}$. A feltételek alapján, az EBC_Δ-ben $m(\widehat{E}) = 40°$, innen $m(\overset{\frown}{TD}) = 40°$.

BE szimmetria tengelye a $\mathcal{K}$ körnek és a $\widehat{DBA}$ szögnek, innen $\overset{\frown}{DT} \equiv \overset{\frown}{TQ}$, ahol $Q \in (BF) \cap \mathcal{K}$.

Ezek alapján $m(\overset{\frown}{DQ}) = 80° \Longrightarrow m(\widehat{DFQ}) = 40° \Longrightarrow \widehat{BFD} \equiv \widehat{BED} \Longrightarrow FEDB$ körbeírható.

b) Legyen $\{S\} = \mathcal{K} \cap (EA)$.

$FEDB$ körbeírható $\Longrightarrow m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{FBE}) = 20° \Longrightarrow m(\overset{\frown}{FS}) = 40° \Longrightarrow m(\widehat{FES}) = 40°$

Innen $AFE_\Delta \sim ADB_\Delta$, mert $\begin{cases} m(\widehat{FAE}) = m(\widehat{DAB}) = 20° \\ m(\widehat{FEA}) = m(\widehat{DBA}) = 40°. \end{cases}$

A hasonlóságból következik, hogy $\frac{AF}{AD} = \frac{FE}{BD}$. Alkalmazva az adott jelöléseket, azt kapjuk, hogy $\frac{a}{AE+b} = \frac{b}{a} \Longrightarrow AE = \frac{a^2-b^2}{b} > 0 \Longrightarrow a \neq b$.

Az $FEDB$ körbeírható, Ptolemaiosz tétele alapján $FD \cdot EB = ED \cdot FB + FE \cdot DB$. A jelölésekkel $a \cdot AE = b \cdot FB + b \cdot a$. Innen

$$FB = \frac{a \cdot (AE - b)}{b} = \frac{a \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{b} - b\right)}{b} = \frac{a^3 - 2ab^2}{b^2}.$$

$$\begin{aligned} DC &= AC - AE - ED = AB - AE - ED = AF + FB - AE - ED \\ &= a + \frac{a^3 - 2ab^2}{b^2} - \frac{a^2 - b^2}{b} - b \\ &= \frac{ab^2 + a^3 - 2ab^2 - a^2b + b^3 - b^3}{b^2} \\ &= \frac{a^3 - ab^2 - a^2b}{b^2}. \end{aligned}$$

c) Az EFD egyenlő szárú háromszögben húzzuk be az ER magasságot, ami egyben oldalfelező is. Így $\cos F = \cos 20° = \frac{FR}{FE} = \frac{a}{2b}$. Innen következik, hogy $2\cos 20° = \frac{a}{b}$. ■

Alternatív megoldás az a) alponthoz. Az F_1 pontot úgy vegyük fel az AB oldalon, hogy $F_1D = BD$. Bizonyítjuk, hogy az így szerkesztett F_1 pont azonos az E középpontú ED sugarú körnek az AB szakasszal való, A ponthoz közelebbi metszéspontjával.

A szerkesztésből következik, hogy BDF_1, BEA és AF_1D háromszögek egyenlő szárúak, ezért

$$\mathrm{m}(\widehat{F_1BD}) = \mathrm{m}(\widehat{BF_1D}) = 40^\circ \quad \text{és} \quad \mathrm{m}(\widehat{ABE}) = \mathrm{m}(\widehat{BAE}) = 20^\circ,$$

másrészt

$$\mathrm{m}(\widehat{BF_1D}) = \mathrm{m}(\widehat{F_1DA}) + \mathrm{m}(\widehat{F_1AD}),$$

azaz $40^\circ = \mathrm{m}(\widehat{F_1DA}) + 20^\circ$, ahonnan $\mathrm{m}(\widehat{F_1DA}) = 20^\circ$.

Mivel $ABE_\Delta \sim ADF_{1\Delta} \Longrightarrow \frac{AF_1}{AE} = \frac{AD}{AB} \Longrightarrow AF_1 \cdot AB = AE \cdot AD$ és az A pont körre vonatkozó hatványát felismerve kapjuk, hogy F_1EDB körbeírható. Innen

$$\mathrm{m}(\widehat{DBE}) = \mathrm{m}(\widehat{DF_1E}) = \frac{\mathrm{m}(\overset{\frown}{EC})}{2} = 20^\circ$$

és $\mathrm{m}(\widehat{F_1DA}) = 20^\circ$ ezért F_1ED_Δ-ben $F_1E = ED$. De $\mathrm{m}(\widehat{AFE}) = 120^\circ \Longrightarrow d(E, AB) = EF_1$, így AB a kört két pontban metszi és F_1 az A-hoz közelebbi metszéspont. ∎

XI-XII. osztály

1. Feladat. Igazold, hogy $2019^{2016}-1$ osztható a $2019^{84}+2019^{42}+1$ számmal!

dr. Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A következő átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned}
&2019^{2016}-1=(2019^{1008}-1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{504}-1)(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{252}-1)(2019^{252}+1)(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{126}-1)(2019^{126}+1)(2019^{252}+1)(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{63}-1)(2019^{63}+1)(2019^{126}+1)(2019^{252}+1)\\
&\qquad\cdot(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{21}-1)(2019^{42}+2019^{21}+1)(2019^{21}+1)\\
&\qquad\cdot(2019^{42}-2019^{21}+1)(2019^{126}+1)(2019^{252}+1)\\
&\qquad\cdot(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1)\\
&=(2019^{84}+2019^{42}+1)(2019^{21}-1)(2019^{21}+1)\cdot\\
&\qquad\cdot(2019^{126}+1)(2019^{252}+1)(2019^{504}+1)(2019^{1008}+1).
\end{aligned}$$

Innen következik, hogy $(2019^{84}+2019^{42}+1)\mid(2019^{2016}-1)$. ■

Megjegyzés. Mivel $2019^{126}-1=(2019^{42}-1)(2019^{84}+2019^{42}+1)$, a megoldás gyorsabban is befejezhető.

2. Feladat. A Kerekasztal körül lévő 12 székre fel van írva a lovagok neve. Ők azonban ezt figyelmen kívül hagyva, véletlenszerűen ülnek le. Mennyi a valószínűsége annak, hogy senki sem ül a saját székén?

Schefler Barna, Budapest

Megoldás. A lehetséges esetek száma 12!, ennyiféleképpen tudjuk elhelyezni a lovagokat a megjelölt székeken. Kiszámoljuk a kedvező esetek számát a logikai szitaformula segítségével. Az összes ültetések számából kivonjuk azoknak az ültetéseknek a számát, amikor pontosan egyvalaki ül a helyén, majd hozzáadjuk azoknak a számát, amikor pontosan két lovag ül a helyén és így tovább. Így a kedvező esetek száma

$$S = 12! - C_{12}^{1}11! + C_{12}^{2}10! - C_{12}^{3}9! + \cdots - C_{12}^{11}1! + 1$$

A fenti eredmények alapján a keresett valószínűség

$$P = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!}$$

■

Megjegyzés. Minél több lovag van, a valószínűség annál jobban közelít $\frac{1}{e}$-hez.

3. Feladat. Mutasd ki, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre a $\sqrt{n}$ felírásában a tizedesvessző utáni első négy számjegy a 2, 0, 1, 9 (ebben a sorrendben)!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Legyen $k, n \in \mathbb{N}$ két olyan szám, amelyre $k = [\sqrt{n}]$. A feltételek alapján $0,2019 \leq \{\sqrt{n}\} < 0,2020$, tehát írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} k + 0,2019 \leq k + \{\sqrt{n}\} < k + 0,2020; \\ k + 0,2019 \leq \sqrt{n} < k + 0,2020; \\ (k + 0,2019)^2 \leq n < (k + 0,2020)^2. \end{aligned}$$

Úgy határozzuk meg a $k \in \mathbb{N}$ lehetséges értékeit, hogy legyen legalább egy természetes szám a $\left[(k + 0,2019)^2, (k + 0,2020)^2\right)$ intervallumban. Tehát $(k + 0,2020)^2 - (k + 0,2019)^2 \geq 1$ kell teljesüljön, ami egyenértékű a $k \geq 5000$ egyenlőtlenséggel. Így bármely $k \geq 5000$, $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $n_k \in \mathbb{N}$, amely a $\left[(k + 0,2019)^2, (k + 0,2020)^2\right)$ intervallumba esik, vagyis végtelen sok olyan természetes szám létezik, amely teljesíti a megadott feltételt. ■

Általánosítás (Bencze Mihály). Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre a $\sqrt{n}$ tizedes reprezentációjában a tizedes vessző utáni első k darab számjegy rendre $a_1, a_2, \ldots a_k$, ahol $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ adott számjegyek minden $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ esetén! ■

Megoldás. Legyen $p, n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $p = [\sqrt{n}]$. A $\sqrt{n}$ tizedes reprezentációjában az első k darab számjegy a tizedesvessző után pontosan akkor lesz rendre $a_1, a_2, \ldots, a_k$, ha

$$\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \leq \{\sqrt{n}\} < 0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k} = \beta.$$

Ez az egyenlőtlenséglánc ekvivalens a

$$p + \alpha \leq [\sqrt{n}] + \{\sqrt{n}\} < p + \beta$$

egyenlőtlenséglánccal, tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$(p + \alpha)^2 \leq n < (p + \beta)^2.$$

Innen következik, hogy azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen p értékekre található természetes szám a $[(p + \alpha)^2, (p + \beta)^2)$ intervallumban.

Ahhoz, hogy ez teljesüljön, elégséges, a

$$(p + \beta)^2 - (p + \alpha)^2 \geq 1$$

egyenlőtlenség teljesülése, ami egyenértékű a

$$2p + \beta + \alpha \geq \frac{1}{\beta - \alpha} = 10^k$$

egyenlőtlenséggel. Viszont ez az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha $p \geq \frac{10^k}{2}$, tehát végtelen sok ilyen p létezik. Ez viszont maga után vonja azt is, hogy végtelen sok, a feladat feltételeinek megfelelő n létezik. $\blacksquare$

4. Feladat. Az ABC háromszögben D az AC oldal felezőpontja, F az AD szakasz felezőpontja, illetve $E, G \in (AB)$ úgy, hogy $AE = BG = \frac{1}{4}AB$. Legyen $DE \cap GF = \{P\}$ és $CG \cap BD = \{Q\}$.

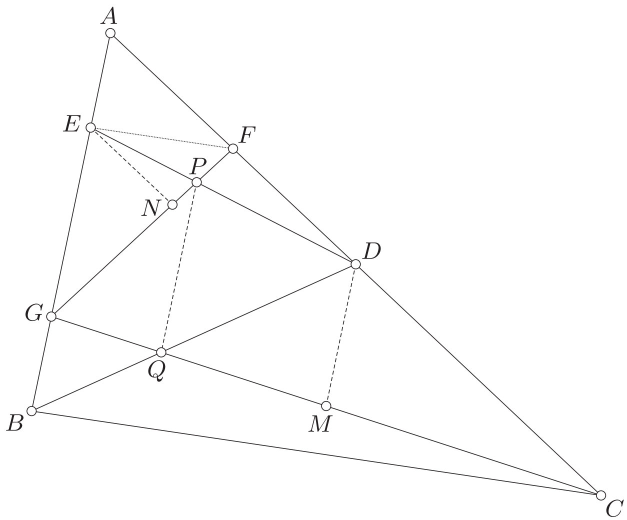
a) Igazold, hogy $\dfrac{EP}{PD} = \dfrac{2}{3}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $PQ || AB$.

c) Mutasd ki, hogy $T_{EDG_\triangle} = \dfrac{1}{4} T_{ABC_\triangle}$.

Simon József, Csíkszereda

1. Megoldás. a) Legyen $EN||AF$, $N \in FG$. A GAF háromszögben a hasonlóság alaptételéből következik, hogy $\frac{EN}{AF} = \frac{GE}{GA} = \frac{2}{3}$. Mivel $[AF] \equiv [FD]$, következik, hogy $\frac{EN}{FD} = \frac{2}{3}$.
A PDF háromszögben $EN||FD$, tehát a hasonlóság alaptétele szerint $\frac{EN}{FD} = \frac{EP}{PD}$. Innen következik, hogy $\frac{EP}{PD} = \frac{2}{3}$.



b) Legyen $DM||AG$, $M \in GC$. A CAG háromszögben DM középvonal, tehát $DM = \frac{AG}{2}$. Mivel $AG = 3 \cdot BG$, ezért $\frac{DM}{BG} = \frac{3}{2}$.
A QBG háromszögben $DM||BG$, így Thalész tétele alapján $\frac{DQ}{QB} = \frac{3}{2}$, vagyis $\frac{BQ}{QD} = \frac{2}{3}$.
Az előbbi összefüggések alapján $\frac{EP}{PD} = \frac{BQ}{QD}$ és Thalész tételének fordított tételét felírva a DEB háromszögben, következik, hogy $PQ||AB$.
c) A DEG háromszög EG alapja fele a CAB háromszög AB alapjának. A D-ből és a C-ből az AB-re húzott DD' és CC' merőleges szakaszok

hosszának aránya $\frac{DD'}{CC'} = \frac{1}{2}$, mert DD' a CAC' háromszög középvonala. Így $\frac{T_{EDG_\triangle}}{T_{ABC_\triangle}} = \frac{EG}{AB} \cdot \frac{DD'}{CC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, tehát $T_{EDG_\triangle} = \frac{1}{4} T_{ABC_\triangle}$.

■

2. Megoldás az a) és b) alpontokra. a) Az AED háromszögre és a G, P, F kollineáris pontokra Menelaosz tétele alapján

$$\frac{GA}{GE} \cdot \frac{PE}{PD} \cdot \frac{FD}{FA} = 1,$$

ezért $\frac{3}{2} \cdot \frac{PE}{PD} \cdot \frac{1}{1} = 1$, vagyis $\frac{EP}{PD} = \frac{2}{3}$. b) Az ABD háromszögre és a C, Q, G kollineáris pontokra Menelaosz tételéből következik, hogy

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{QB}{QD} \cdot \frac{CD}{CA} = 1,$$

és így $\frac{3}{1} \cdot \frac{QB}{QD} \cdot \frac{1}{2} = 1$, tehát $\frac{BQ}{QD} = \frac{2}{3}$. Az előbbiek alapján $\frac{EP}{PD} = \frac{BQ}{QD}$, ahonnan Thalész tételének fordított tételét felírva a DEB háromszögre következik, hogy $PQ || AB$.

■

5. Feladat. Egy hegyesszögű háromszög alapja a és a hozzátartozó magasság m. Rajzolj az alapra egy négyzetet úgy, hogy a négyzet felső két csúcsa is a háromszög egy-egy oldalán legyen. A keletkezett kisebb, az eredetihez hasonló háromszögbe szerkessz hasonlóképpen négyzetet és így tovább. Mekkora a négyzetek területének összege?

Zay Éva, Zilah

Megoldás. Legyenek az egymás után következő négyzetek oldalai x_1, x_2, $x_3, \ldots$ A keletkezett egyre kisebb, az eredetivel hasonló háromszögek magasságai

$$m - x_1, m - x_1 - x_2, m - x_1 - x_2 - x_3, \ldots$$

A keletkezett háromszögeknek az eredeti háromszöghöz való hasonlósága alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{x_1}{a} = \frac{m - x_1}{m}, \quad \text{vagyis} \quad x_1 = \frac{am}{a+m},$$
$$\frac{x_2}{a} = \frac{m - x_1 - x_2}{m}, \quad \text{vagyis} \quad x_2 = \frac{am^2}{(a+m)^2},$$

és általában a k-adik négyzet oldalhossza

$$x_k = \frac{am^k}{(a+m)^k},$$

ami igazolható a matematikai indukció módszerével. Az előbbi gondolatok alapján a k-adik szerkesztett négyzet területe

$$T_k = x_k^2 = \frac{a^2 m^{2k}}{(a+m)^{2k}}.$$

A $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sorozat mértani haladvány $q = \dfrac{m^2}{(a+m)^2} < 1$ hányadossal. Következésképpen a négyzetek területeinek összege

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T_k = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{am^2}{a+2m} \left(1 - \frac{m^{2n}}{(a+m)^{2n}} \right) \right] = \frac{am^2}{a+2m}.$$

■

6. Feladat. Egy 6×6-os táblát lefedtünk 18 darab 1×2-es dominóval. Bizonyítsd be, hogy bármely lefedés esetén van olyan vízszintes vagy függőleges vonal, ami két részre osztja a táblát, de nem vág ketté egy dominót sem!

Schefler Barna, Budapest

Megoldás. Vegyük észre, hogy egy sorban csak páros sok függőleges, míg egy oszlopban csak páros sok vízszintes dominó lehet (mivel a dominó hossza 2, azaz páros). Feltételezzük, hogy nincs sem vízszintes, sem függőleges vonal, amely 2 részre osztja a táblát dominó szétvágása nélkül. Ekkor minden vízszintes és minden függőleges vonal szétvág legalább egy dominót. Függőleges vonal csak vízszintes, míg vízszintes vonal csak függőleges dominót vághat el. A 6×6-os táblán 5 vízszintes és 5 függőleges belső vonal van, mindegyik legalább egy dominót vág el a feltevés szerint. Ugyanakkor a fenti észrevétel szerint egy vonal egyszerre páros sok dominót vághat el, tehát mindegyik legalább kettőt. Ez azt jelenti, hogy legalább $2 \cdot 10 = 20$ dominónk van, ami ellentmondás. Tehát létezik olyan vonal, amely megfelel a feltételeknek. ∎